Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström

Tentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar

Tentamensdatum: 2006-03-18

Skrivtid: 9-15

Hjälpmedel: inga

Om problembeskrivningen i något fall är oklar, bestäm dig för en rimlig tolkning och anteckna den vid lösningen.

Börja varje uppgift på ett nytt blad. Skriv ditt namn och uppgiftens nummer uppe till höger på varje blad.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Lycka Till!

Uppgift 1: (3+5 p)

a) Denna översiktsuppgift innebär att du ska jämföra de linjära ekvationssystemen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m > n)$ med varandra samt redogöra för vissa centrala begrepp och egenskaper. Matriserna $\mathbf{A}$ antas ha full kolumnrang.
Beskriv i ord och bild skillnaden mellan de två typerna av ekvationssystem i fallet $n = 2$ och $m = 3$. Figuren ska tydligt visa hur $\mathbf{A}$'s värderum, residualen samt vektorn $\mathbf{b}$ förhåller sig till varandra.

b) Med **LU**-uppdelningen given, dvs $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, ange på matris och vektornivå en algoritm för lösning av $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n\times 1}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$. Ange och beskriv alltså noggrant en algoritm för bestämning av $\mathbf{x}$ ur $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ baserad på den givna **LU**-faktoriseringen. Redogör därefter i detalj för hur många flops (dvs flyttalsoperationer) som algoritmen behöver, dvs gör en komplexitetsanalys för algoritmen i fråga.

Tips: Antalet flops ska bero av n. Vidare gäller att $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Uppgift 2: (3+5 p)

a) Denna uppgift behandlar lösning av icke-linjära ekvationer mha iterativa metoder. Nedan finns algoritmen för en sådan metod angiven:

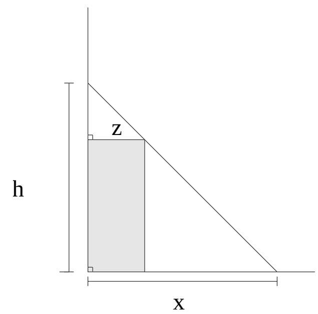
1: Bestäm startvärde x_0. Initiera $maxiter, xtol, ftol$. Sätt $xerr = 1, ferr = 1$ och k=0.

2: **while** $xerr > xtol$ **and** $ferr > ftol$ **and** $k < maxiter$
   Bestäm funktionsvärdet $f(x_k)$
   Bestäm derivatan $f'(x_k)$
   Lös $\Delta x_k = -f(x_k)/f'(x_k)$
   $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$
   $xerr = |\Delta x_k|; ferr = |f(x_k)|; k = k+1$

3: **end**

Med utgångspunkt från den givna algoritmen för lösning av icke-linjära ekvationer, dvs i fallet $f(x) = 0$ då $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$, nämn minst två svårigheter man generellt kan råka ut för vid användandet av denna metod samt lämpliga åtgärder för att undvika/minska effekten av dessa svårgheter.

b) [1] På avståndet 1 meter från en vägg finns en 2 meter hög mur. En 5 meter lång stege lutas över muren mot väggen så att stegen nuddar muren.



[1]Detta är ett modifierat KTH-tal.

Matematisk problemformulering enligt

Pytagoras sats: $x^2 + h^2 = 5^2$ (1)

Likformighet: $\frac{x}{z} = \frac{h}{h-2}$ (2)

(1) & (2) samt antagandet att $z = 1$ ger:

$$x^2 = \{ekv.\ (2)\} = \frac{h^2}{(h-2)^2} = \{ekv.\ (1)\} = 25 - h^2$$

Alltså har vi att

$$h^2 + \left(\frac{h}{h-2}\right)^2 = 25 \qquad \rightarrow \qquad y(h) = h^2 + \left(\frac{h}{h-2}\right)^2 - 25 = 0 \qquad (3)$$

Vi har i detta fall $y(h) = 0,\ y : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$, dvs en skalärvärd ickelinjär ekvation med en obekant.

Föreslå, utgående från $y(h) = 0$ där $y(h)$ är given enligt ekvation (3) ovan, en algoritm för fixpunktsiteration på formen $h_{n+1} = g(h_n)$ och redogör tydligt för hur du kan avgöra om ditt val är lämpligt med avseende på teoretiska konvergensvillkor. **Observera** att den av dig valda algoritmen inte behöver konvergera för att du ska få full poäng, utan det räcker med att du kan ange en korrekt fixpunktsalgoritm för detta problem samt tydligt redogöra för hur man analyserar för att avgöra huruvida den valda algoritmen konvergerar eller ej. Detta innebär att du inte i detalj behöver utföra några komplicerade deriveringar däremot redogöra för huruvida det behöver göras några deriveringar och isåfall på vad och varför. Föreslå, med ledning att nollställena till $y(h) = 0$ ligger i närheten av -4.9, 1.7, 2.6 och 4.7, även rimligt startvärde h_0 för den av dig valda fixpunktsalgoritmen, samt motivera tydligt detta val av h_0 med avseende på tillämpningen i fråga.

Uppgift 3: (3+5 p)

a) Jämför de två interpolationsmodellerna

$$\begin{cases} \text{Vandermonde:} & P_V(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots \\ \text{Newton:} & P_N(t) = c_1 + c_2(t - t_1) + c_3(t - t_1)(t - t_2) + \ldots \end{cases}$$

där $t_i, i = 1, 2, \ldots$ är givna. Redogör utförligt för skillnaderna vad avseer kondition och effektivitet. Redogör även hur du gör för att inkludera ytterligare datapunkter, dvs antag att P_V och P_N beräknas för N datapunkter men att dessa interpolationsmodeller sedan ska uppdateras för ytterligare en datapunkt.

b:) Tolv avstånd runt origo (ekrar runt ett nav) har uppmätts vid konstanta vinkelavstånd och man vill pröva att anpassa en modellfunktion i polära koordinater enligt

$$R(\varphi) = \frac{a + b\,sin(\varphi)}{1 + c\,cos(\varphi)}$$

till given data enligt

φ_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
R_i	3.3	3.5	2.7	2.0	1.4	1.0	0.7	0.5	0.4	0.5	0.9	1.9

Ställ upp det linjära ekvationssystem som ska lösas för att, i minsta kvadratmetodens mening, bestämma de okända modellparametrarna i modellfunktionen ovan från de givna mätvärdena enligt given tabell. Med lämpligt val av beteckningar resulterar detta i ett linjärt ekvationssystem med matrisen $\mathbf{A}$ och vektorerna $\mathbf{x}$ samt $\mathbf{b}$. Du behöver inte explicit lösa ekvationssystemet, dvs explicit räkna ut siffervärden för $\mathbf{x}$, utan det räcker med att du anger motsvarande element i $\mathbf{A}, \mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$. Vidare ska du utförligt motivera om det i denna deluppgift är frågan om ett interpolations- eller approximationsproblem.

Uppgift 4: (2+6 p)

a) Trapetsregeln innebär att integralen $\int_a^b f(t)dt$ kan approximeras med uttrycket

$$T(h) = h\,(\frac{1}{2}f(a) + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f(b))$$

där $f_1 = f(a+h), f_2 = f(a+2h), \ldots$. Vidare gäller att $E_{trunk} = T(h) - \mathcal{A} = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \ldots$, där $\mathcal{A} = \lim_{h\to 0} T(h) = \int_a^b f(t)dt$.

Redogör noga för vilken typ av approximationer som ger upphov till trunkeringsfelet E_{trunk} samt härled uttrycket för tabellfelet E_{tab} som uppkommer pga att $|\tilde{f} - f| \leq E_f$.

b) Vi vill numeriskt beräkna derivatan $f'(t)$. Centraldifferens , $D(h) = \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h}$, är den approximation som ska användas och för trunkationsfelet gäller i detta fall $c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \ldots$ (där c_i är oberoende av h).

Teckna det uttryck som bestämmer en approximation, mha centraldifferens och steglängden h_1, för D1. Du ska alltså <u>inte räkna ut</u> värdet utan det antas vara givet som $D1$. Låt vidare $D2$ beteckna det värde man får då man räknar med centraldifferens och steglängd $h_2 = h_1/2$. Låt $D3$ på motsvarande sätt beteckna det värde man får då man räknar med steglängden $h_3 = h_2/2$ och slutligen låt $D4$ motsvara steglängden $h_4 = h_3/2$.

Skriv ned det Richardsonextrapolations schema man får då D_i, $i = 1, \ldots 4$, används. Inför lämpliga beteckningar på de kvantiteter som beräknas. Det ska tydligt framgå hur schemat byggs upp. Redogör även för hur man uppskattar E_{trunk} och E_{tab}. Trunkationsfelet betecknas med E_{trunk} och felet, pga osäkerhet i vid beräkningen av f, med E_{tab}. Vidare är det givet att $|\tilde{f}(t) - f(t)| \leq E_f$. Redogör även för, i detalj, varför kontrollkvoterna kolumnvis uppför sig som q^{p_i} samt ange vilka värden på q och p_i som du baserar ditt resonemang på.

Uppgift 5: (3+5 p)

a) Utgå från

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \;\; y(t_0) = y_0 \\ \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \;\; t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

för att på ett tydligt sätt beskriva vad som skiljer explicita och implicita ODE-metoder i samband med numerisk lösning av ODE (Ordinära Differential Ekvationer). Redogör även för, mha figur och text, vad ett riktningsfält är för en ODE på standardform.

b) Denna uppgift handlar om ett dynamiskt system som beskriver en strömkrets. Motsvarande system av ODE ges av

$$L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_1}(i_1(t) - i_2(t)) = 0$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_2}(i_2(t) - i_3(t)) - \frac{1}{C_1}(i_1(t) - i_2(t)) = 0$$

$$L_3 \frac{d^2 i_3(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_3} i_3(t) - \frac{1}{C_2}(i_2(t) - i_3(t)) = 0$$

där $i_1(t), i_2(t)$ och $i_3(t)$ är strömmar som funktion av t och $d^2 i_1(t)/dt^2$ betecknar andraderivatan av $i_1(t)$ map t. Vidare gäller att L_1, L_2 och L_3 betecknar respektive induktans i den aktuella strömkretsen liksom att de är konstanta (dvs L_1, L_2 och L_3 beror ej av tiden t). Kapacitanserna C_1, C_2 och C_3 är även de konstanter, dvs oberoende av tiden t.

Standardprogramvara, tex Matlab, kräver att ODE:en är på standardform. Du ska alltså inte lösa differentialekvationssystemet utan bara ställa upp det på standardformen $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t),\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ där det klart och tydligt ska framgå vilka element vektorerna $\frac{d\mathbf{y}}{dt}, \mathbf{f}, \mathbf{y}$ och $\mathbf{y}_0$ har.