Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström

Tentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar

Tentamensdatum: 2005-03-21

Skrivtid: 9-15

Hjälpmedel: inga

Om problembeskrivningen i något fall är oklar, bestäm dig för en rimlig tolkning och anteckna den vid lösningen.

Börja varje uppgift på ett nytt blad. Skriv ditt namn och uppgiftens nummer uppe till höger på varje blad.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Lycka Till!

Uppgift 1: (3+5 p)

a) Redogör noggrant för teoretisk och experimentell felkalkyl. Beskriv dessutom minst en central skillnad mellan dessa två olika typer av felkalkyl.

b) En dator med representation enligt $\pm 0.xxxx \cdot 10^{\pm p}$, där taldelen uppfyller $0.1 \leq 0.xxxx < 1$, ska användas för att beräkna följande ekvationssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -0.1000 \cdot 10^{-4} & +0.1000 \cdot 10^{+1} \\ +0.2000 \cdot 10^{+1} & +0.1000 \cdot 10^{+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} +0.1000 \cdot 10^{+1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Vidare är konditionstalet, avrundat till fyra decimaler, $\kappa_2(A) = 2.6180$ samt att 0 lagras exakt.

Baserat på den givna dator representationen, beräkna för hand med hjälp av Gausselimination och bakåtsubstitution lösningen $\mathbf{x}$. De olika delstegen i denna beräkning ska tydligt framgå. Redogör detaljerat för lösningens kvalitet baserat på numeriska konditions- och stabilitetsaspekter. Är du nöjd med den framräknade lösningen $\mathbf{x}$, om ej, föreslå åtgärder samt visa i detalj om/hur detta kan förbättra kvaliteten.

Uppgift 2: (3+2+3 p)

Du står inför problemet att lösa $f(x) = 0, f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ då $f(x) = x^2 - x - 2$. Två fixpunktsiterationsalgoritmer är föreslagna enligt

Algoritm 1:	Algoritm 2:
$x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$	$x_{n+1} = {x_n}^2 - 2$

Vilken algoritm väljer du för att lösa problemet? Basera ditt val på teoretiska konvergensvillkor och motivera noggrant ditt val.

Tips: Plotta $f(x)$ för att grovlokalisera rötterna.

b) Studera fixpunktsiterationsformeln $x_{n+1} = g(x_n)$. Antag att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Konvergensordningen för denna talföljd $\{x_n\}$ sägs ha ordning r om det gäller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - a|}{|x_n - a|^r} = K \neq 0.$$

Hur kan man experimentellt uppskatta K för en fixpunktsiterationsformel då man vet att följden har linjär konvergens?

c) Antag att du vid användning av den valda fixpunktsformeln fått resultatet $\tilde{x}$. Redogör för hur du med hjälp av metodoberoende felskattning kan få information om hur noggran $\tilde{x}$ är.

Uppgift 3: (3+5 p)

a) Interpolation innebär att modellen $g(t)$ anpassas till given diskret data med resultatet att modellen tex går genom de givna datapunkterna. I fallet att modellen är ett polynom brukar modellen betecknas $P(t)$ istället för $g(t)$. Beskriv, utgående från villkor på $P(t)$, Hermiteinterpolation samt interpolation med kubiska splines. Vilken är den mest centrala skillnaden mellan dessa två typer av interpolation?

b:) EU-förvaltningens dokumentproduktion g, mätt i KA4 (tusen A4), har haft en imponerande utveckling under de senaste åren. Det datorprogram som automatiskt registrerar g startade november 1988 och t anger antalet år efter detta datum. Följande data är givet

t	0	1	2.5	3	3.5	4	5	6
g	4	8	54	76	78	66	75	130

Följande modell antas beskriva dokumentproduktionen

$$g(t) = ae^{qt} + be^{-(t-t_0)^2}$$

där $q = 0.5$ och $t_0 = 3$.

Ställ upp det linjära ekvationssystem som ska lösas för att bestämma de okända modellparametrarna från de givna mätvärdena. Du ska alltså ange det $\mathbf{A}, \mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$ du då får, och avgöra huruvida det i denna deluppgift är frågan om interpolation eller approximation. Motivera utförligt ditt val. Du ska inte explicit räkna ut vektorn $\mathbf{x}$ utan bara ange det aktuella ekvationssystemets koefficientmatris $\mathbf{A}$, lösningsvektorn $\mathbf{x}$ samt högerledsvektorn $\mathbf{b}$. Vidare förväntas ni inte explicit räkna ut eventuellt komplicerade matematiska uttryck i matrisen $\mathbf{A}$, däremot ska dessa uttryck skrivas ut så att det tydligt framgår vilka $\mathbf{A}$'s element är.

Uppgift 4: (2+6 p)

a) Betrakta problemet att numeriskt beräkna integralerna nedan

$$I_1 = \int_0^5 f_1(t)dt \qquad\qquad I_2 = \int_1^\infty f_2(t)dt$$

där integranden $f_1(t)$ är lika med ∞ för $t = 0$ och $f_2(t) < \infty$.

Beskriv principiellt hur man hanterar denna typ av integraler numeriskt. Ni ska alltså inte räkna något utan bara beskriva.

b) Vi vill numeriskt beräkna derivatan $f'(t)$. Centraldifferens , $D(h) = \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h}$, är den approximation som ska användas och för trunkationsfelet gäller i detta fall $c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \ldots$ (där c_i är oberoende av h).

Teckna det uttryck som bestämmer en approximation, mha centraldifferens och steglängden h_1, för D1. Du ska alltså <u>inte räkna ut</u> värdet utan det antas vara givet som $D1$. Låt vidare $D2$ beteckna det värde man får då man räknar med centraldifferens och steglängd $h_2 = h_1/2$. Låt $D3$ på motsvarande sätt beteckna det värde man får då man räknar med steglängden $h_3 = h_2/2$ och slutligen låt $D4$ motsvara steglängden $h_4 = h_3/2$.

Skriv ned det Richardsonextrapolations schema man får då D_i, $i = 1, \ldots 4$, används. Inför lämpliga beteckningar på de kvantiteter som beräknas. Det ska tydligt framgå hur schemat byggs upp. Redogör även för hur man uppskattar E_{trunk} och E_{tab}. Trunkationsfelet betecknas med E_{trunk} och felet, pga osäkerhet i vid beräkningen av f, med E_{tab}. Vidare är det givet att $|\tilde{f}(t) - f(t)| \leq E_f$. Redogör även för, i detalj, varför kontrollkvoterna kolumnvis uppför sig som q^{p_i} samt ange vilka värden på q och p_i som du baserar ditt resonemang på.

Uppgift 5: (3+5 p)

a) Utgå från

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \;\; y(t_0) = y_0 \\ \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \;\; t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

för att på ett tydligt sätt beskriva vad som skiljer explicita och implicita ODE-metoder. Redogör även för sk adaptiva lösningsmetoder i samband med numerisk lösning av ODE (Ordinära Differential Ekvationer).

b) Denna uppgift handlar om ett dynamiskt system bestående av massor och fjädrar som rör sig på ett friktionsfritt underlag enligt figur 1. Massa 1 (betcknad m_1 i figuren) rullar längs en horisontell yta och dess rörelse stryrs av fjäder 1 med fjäderkonstanten k_1. Massa 2 (betcknad m_2 i figuren) är ett hjul med radien r_2 som rullar ovanpå massa 1 och vars rörelse styrs av fjäder 2 med fjäderkonstanten k_2. Genom att använda modeller från stela kroppars dynamik fås följande system av ODE:

$$(m_1 + 0.5m_2)\ddot{x_1} - 0.5m_2\ddot{x_2} + k_1x_1 = 0$$
$$-0.5m_2\ddot{x_1} + 1.5m_2\ddot{x_2} + k_2x_2 = 0$$

där x_1 och x_2 är respektive massas avvikelse från jämviktsläget och som man vill bestämma. Vidare är det känt att $m_1 = m_2 = 5$ kg, $k_1 = k_2 = 15$ N/m, $x_1(0) = 1.5$ m, $x_2(0) = 0$ m samt att massornas hastigheter i startpunkten för det dynamiska förloppet är lika med 0 m/s.

Börja med att stoppa in given data i ODE:en för att få den på en mera lätthanterlig form. Standardprogramvara, tex Matlab, kräver att ODE:en är på standardform. Du ska inte lösa differentialekvationssystemet utan bara ställa upp det på standardformen $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ där det klart och tydligt ska framgå vilka element vektorerna $\frac{d\mathbf{y}}{dt}, \mathbf{f}, \mathbf{y}$ och $\mathbf{y}_0$ har.

TIPS : Det kan vara lämpligt att som ett delsteg skriva om ODE-systemet på formen $A\bar{v} = \bar{b}$ där vektorn $\bar{v} = \begin{bmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix}$ samt vid behov använda vetskapen om att inversen till $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ är lika med $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

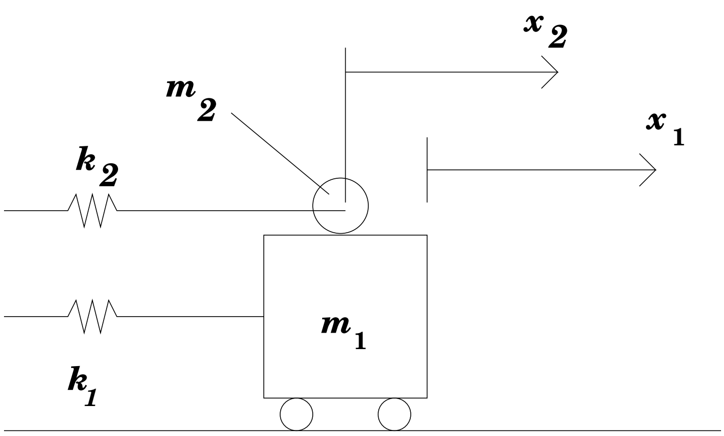

Figure 1: