Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström (e-post wikstrom)

Omtentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar för DV & TDV

Tentamensdatum: 2005-06-07

Skrivtid: 9-15

Hjälpmedel: inga (förutom penna och linjal)

Om problembeskrivningen i något fall är oklar, bestäm dig för en rimlig tolkning och anteckna den vid lösningen.

Börja varje uppgift på ett nytt blad. Skriv ditt namn och uppgiftens nummer uppe till höger på varje blad.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Lycka Till!

Uppgift 1: (2+6 p)

a: Denna deluppgift innebär att du ska jämföra de linjära ekvationssystemen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in R^{n\times n}$ och $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}, \mathbf{A} \in R^{m\times n}$ $(m > n)$ med varandra samt redogöra för vissa centrala begrepp och egenskaper. Matriserna $\mathbf{A}$ antas ha full kolumnrang.
Beskriv i ord och bild skillnaden mellan de två typerna av ekvationssystem i fallet $n = 2$ och $m = 3$. Figuren ska tydligt visa hur $\mathbf{A}$'s värderum, residualen samt vektorn $\mathbf{b}$ förhåller sig till varandra.

b: Låt den symmetriskt positivt definita $k \times k$ matrisen $\mathbf{A}$ ha Cholesky-faktoriseringen $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$. Vidare gäller att den symmetriskt positivt definita matrisen $\mathbf{B}$ har utseendet enligt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \mathbf{b} & n \times 1 \text{ vektor} \\ \alpha & \text{positiv skalär} \end{array}$$

Bestäm Cholesky-faktoriseringen för matrisen $\mathbf{B}$ genom att ansätta

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} \qquad \text{med} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & \beta \end{bmatrix}$$

där

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P} & k \times k \text{ högtriangulär matris} \\ \mathbf{r} & k \times 1 \text{ vektor} \\ \beta & \text{positiv skalär} \end{array}$$

Tips: Identifiera elementen i $\mathbf{B}$ med de i $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$, dvs uttryck $\mathbf{U}$'s element med hjälp av given information.

Uppgift 2: (2+6 p)

a) Denna deluppgift behandlar icke-linjära ekvationer och går ut på att du ska göra en översikt, map vissa faktorer, över några metoder enligt tabellen nedan

faktor	Intervallhalveringsmetoden	Sekantmetoden	Newton-Raphson
typ av info om f			
konvergensordning			
startgissningar			

Lämpligen skriver du av denna tabell och anpassar den så att du får plats med dina svar. Den första faktorn, typ av info om f, avser vilken typ av information om funktionen f som respektive metod behöver för att lösa problemet $f(x) = 0$. Den andra faktorn, konvergensordning, avser hur snabbt respektive metod konvergerar (under förutsättning att man har konvergens och är nära roten). Faktorn startgissningar, slutligen, avser hur många startgissningar som respektive metod behöver.

OBS: Du behöver inte fylla i hela tabellen för att få full poäng utan för att få maxpoäng krävs **minst** att du korrekt redogör för två faktorer.

b) Du står inför problemet att lösa $f(x) = 0, f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ då $f(x) = 3x - x^2 - 1$ i intervallet $0 \le x \le 3$. Den föreslagna algoritmen för fixpunktsiteration är

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}({x_k}^2 + 1)$$

Gör en analys baserad på teoretiska konvergensvillkor för att utreda lämpligheten i att använda den föreslagna algoritmen för att beräkna samtliga rötter i det angivna intervallet. Är den föreslagna algoritmen lämplig att använda i denna situation? Motivera noggrant ditt ställningstagande.

Uppgift 3: (2+6 p)

a: Man försöker approximera funktionen $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$ med ett polynom genom ekvidistant placerade punkter på intervallet $-1 \leq t \leq 1$. Resultatet av denna interpolation finns grafiskt återgivet i Bilaga 1. Vilken är förklaringen till att de valda basfunktionerna $\phi_i(t) = t^{i-1}$ ger upphov till det grafiska resultatet i Bilaga 1? Föreslå minst en åtgärd för att undvika denna typ av numeriska problem. Förklara tydligt.

b:) En planet har en elliptisk bana som kan beskrivas i ett Cartesiskt koordinatsystem (x, y) enligt modellen

$$ay^2 + bxy + cx + dy + e = x^2$$

där a, b, c, d och e är obekanta modellparametrar som man önskar bestämma för att få en komplett modell. Följande data för planetens position är given:

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

Ställ upp det linjära ekvationssystem som ska lösas för att bestämma de okända modellparametrarna från de givna mätvärdena. Du ska alltså ange det $\mathbf{A}, \mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$ du då får, och avgöra huruvida det i denna deluppgift är frågan om interpolation eller approximation? Motivera utförligt ditt val. Du ska inte explicit räkna ut vektorn $\mathbf{x}$ utan bara ange det aktuella ekvationssystemets koefficientmatris $\mathbf{A}$, lösningsvektorn $\mathbf{x}$ samt högerledsvektorn $\mathbf{b}$. Observera vidare skillnaden mellan det skalära x-värdet som anger en koordinat och lösningsvektorn $\mathbf{x}$.

Uppgift 4: (2+6 p)

a) Beskriv Rombergs metod samt adaptiva metoder (i fallet med lösning av integraler).

b) Vi vill numeriskt beräkna derivatan $f'(t)$. Framåtdifferens, $D(h) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, är den numeriska metod som ska användas och för trunkationsfelet gäller i detta fall $c_1h^1 + c_2h^2 + c_3h^3 + \ldots$ (där c_i är oberoende av h).

Teckna det uttryck som bestämmer en approximation, mha framåtdifferens och steglängden h_1, för D1. Du ska alltså <u>inte räkna ut</u> värdet utan det antas vara givet som $D1$. Låt vidare $D2$ beteckna det värde man får då man räknar med framåtdifferens och steglängd $h_2 = h_1/2$. Låt $D3$ på motsvarande sätt beteckna det värde man får då man räknar med steglängden $h_3 = h_2/2$ och slutligen låt $D4$ motsvara steglängden $h_4 = h_3/2$.

Skriv ned det Richardsonextrapolations schema man får då D_i, $i = 1, \ldots 4$, används. Inför lämpliga beteckningar på de kvantiteter som beräknas. Det ska tydligt framgå hur schemat byggs upp. Redogör även för hur man uppskattar E_{trunk} och E_{tab}. Trunkationsfelet betecknas med E_{trunk} och felet, pga osäkerhet i vid beräkningen av f, med E_{tab}. Vidare är det givet att $|\tilde{f}(t) - f(t)| \leq E_f$.

Uppgift 5: (2+6 p)

a) Använd begreppet riktningsfält för ODE samt

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & y(t_0) = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

för att på ett lämpligt sätt beskriva vad som menas med väl/illakonditionerade problem och stabila/instabila algoritmer i samband med ordinära differential ekvationer (ODE).

b) Enligt Newtons gravitationslag påverkar solen en planet med en kraft som är riktad mot solen och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet. När man delar upp kraften längs koordinataxlarna i ett fixt $x - y$-system med solen i origo få man därför (om man valt lämpliga enheter) följande system av begynnelsevärdesproblem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{cos\phi}{r^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{sin\phi}{r^2}$$

där ϕ är vinkeln mellan positiva x-axeln och ortsvektorn r är avståndet från origo till planeten.

Skriv om differentialekvationerna för de oberoende variablerna x och y till ett system av första ordningens differentialekvationer. Det gäller alltså bland annat att skriva högerleden som funktioner av x och y. Vidare gäller att $r = 1, \frac{dr}{dt} = 0, \phi = 0, \frac{d\phi}{dt} = 1.4$ Dessa begynnelsevärden måste översättas till begynnelsevärden för $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$. Du ska **inte** lösa differentialekvationssystemet utan bara ställa upp det på formen $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t),\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$ där det klart och tydligt ska framgå vilka element vektorerna $\frac{d\mathbf{y}}{dt}, \mathbf{f}, \mathbf{y}$ och $\mathbf{y_0}$ har.

Tips: $x = r\,cos\phi$, $y = r\,sin\phi$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Observera att det kan vara lite knepigt att bestämma $\mathbf{y_0}$.

Bilaga 1, komplement till uppgift 3.a

Man försöker approximera funktionen $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$ med ett polynom genom ekvidistant placerade punkter på intervallet $-1 \leq t \leq 1$. Ex ett 2:a gradspolynom ($g(t) = x_1 + x_2 t$) genom $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, ett 4:e gradspolynom ($g(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^4$) genom $(-1, f(-1))$, $(-0.5, f(-0.5))$, $(0, f(0))$, $(0.5, f(0.5))$, $(1, f(1))$, samt ett 20:e gradspolynom ($g(t) = x_1 + x_2 t + \ldots + x_{20} t^{20}$) genom $(-1, f(-1))$, $(-0.9, f(-0.9))$, $(-0.8, f(-0.8), \ldots$, $(1, f(1))$. Den heldragan linjen är $f(t)$ och de övriga approximationerna $g(t)$.

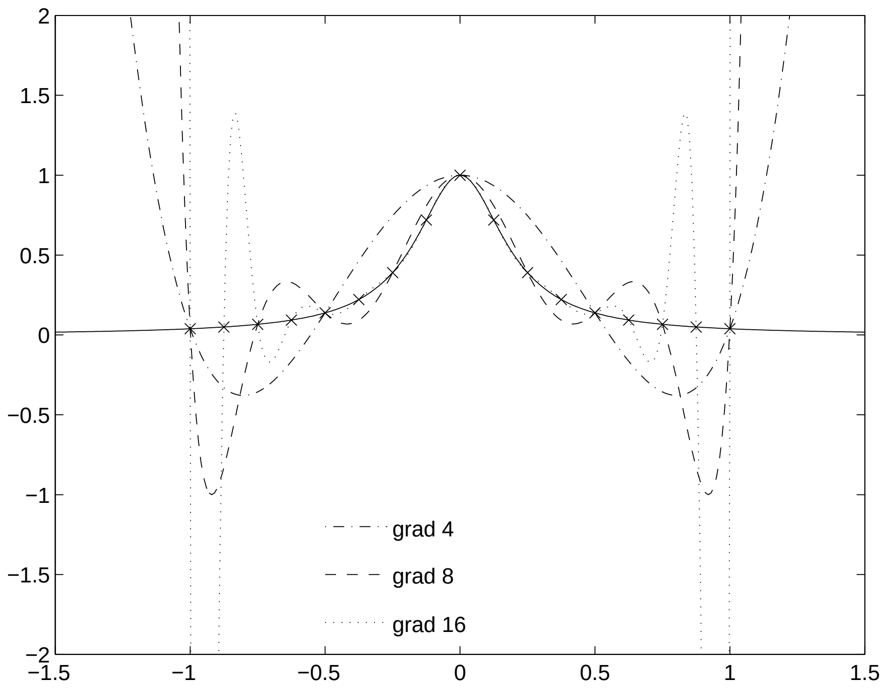

Figure 1: