Straffmetoder

Straff- eller barriärmetoder utgår från bivillkorsproblemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in S, \end{array}$$

där S är den tillåtna mängden. Definiera *strafffunktionen*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & x \in S \\ \infty & \text{annars} \end{cases}.$$

Med denna definition kan bivillkorsproblemet skrivas om till följande problem utan bivillkor:

$$\min f(x) + \sigma(x).$$

Straff- och barriärmetoder löser en sekvens av problem som ersätter $\sigma(x)$ med en kontinuerlig funktion som går mot $\sigma(x)$ då $k \to \infty$.

Barriärmetoder

För ett problem med olikhetsbivillkor

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

kan en barriärmetod användas.

Definiera funktionen $\phi(x)$ sådan att

$$\phi(x) \to \infty \text{ då } g_i(x) \to 0,$$

t ex

$$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x))$$

eller

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}.$$

Denna funktion kommer att fungera som en barriär när x närmar sig gränsen för det tillåtna området från insidan. Barriärmetoder kallas också för *inre straffmetoder*.

Barriärmetoder, forts.

Definiera sedan barriärfunktionen

$$\beta(x, \mu) = f(x) + \mu\phi(x),$$

där μ kallas för *barriärparametern*.

Vi löser sedan problemen

$$\min_x \beta(x, \mu_k)$$

för en monotont avtagande sekvens $\{\mu_k\}$. Då $\mu_k \to 0$ kommer x att släppas närmare och närmare bivillkoren.

(Yttre) straffmetoder

Yttre straffmetoder går att använda på problem med likhetsbivillkor:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Definiera funktionen $\psi(x)$ sådan att $\psi(x) = 0$ då $x \in S$, $\psi(x) > 0$ annars och $\psi(x) \to 0$ då $x \to S$. $\psi(x)$ kommer då att fungera som en straffunktion där straffets storlek bestäms av hur "mycket" otillåten x är.

Ett exempel på en straffunktion är den *kvadratiska förlustfunktionen*

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2 = \frac{1}{2} g(x)^T g(x).$$

(Yttre) straffmetoder, forts.

Definiera sedan straffunktionen

$$\pi(x, \rho) = f(x) + \rho\psi(x)$$

där ρ kallas för *straffparametern*.

Vi löser sedan problemen

$$\min_x \pi(x, \rho_k)$$

för en monotont växande sekvens $\{\rho_k\}$. Då $\rho_k \to \infty$ kommer x att tvingas närmare och närmare S.