Tentamen 2005-10-05

Logik för datavetare (TDBB42)

(antal uppgifter 7; max poäng 40; betygsgränser 20/26/32)

– Johanna Högberg –

Uppgift 1 **2 + 2 poäng**

(a) Ett *tertiärt* konnektiv tar tre argument, till skillnad från t ex binära konnektiv, vilka tar två. Hur många inekvivalenta tertiära konnektiv kan man definiera?

(b) Vad innebär det att en mängd konnektiv är komplett?

Svar

(a) Det finns 2^3 distinkta tolkningar, och för var och en av dessa kan konnektivet bli sant eller falsk, därför finns det $2^{(2^3)} = 256$ logiskt inekvivalenta tertiära konnektiv.

(b) En mängd konnektiv $\mathbf{C}$ är komplett om varje välformad formel φ kan skrivas om till en logiskt ekvivalent formel φ' som enbart innehåller konnektiv i $\mathbf{C}$.

Uppgift 2 **2 + 2 + 2 poäng**

Låt $\Gamma = (\mathbf{S}, \mathbf{R})$, där $\mathbf{S} = \{\alpha_1\}$ och $\mathbf{R} = \{\mathsf{Modus\ Ponens}\}$, vara ett satslogiskt bevissystem. Axiomschemat α_1 består som synes av en enda platshållare. Denna platshållare ersätts med en godtycklig formel varje gång schemat används i ett bevis.

(a) Är Γ sunt? Varför/varför inte?

(b) Är Γ fullständigt? Varför/varför inte?

(c) Finns det någon passande tillämpning för Γ?

Svar

(a) Nej, axiomschemat gör att varje satslogisk formel kan härledas oavsett hypoteser.

(b) Ja, eftersom alla satslogiska formler kan bevisas följa utifrån en mängd Φ så kan i synnerhet varje formel φ för vilken $\Phi \models \varphi$ gäller bevisas.

(c) Om man bortser från att vara ett illustrativt exempel så finns det ingen plats för Γ inom logiken.

Uppgift 3 **2 + 4 poäng**

(a) Finns det en satslogisk formel φ sådan att $\mathsf{length}(\varphi) > 1$ och som samtidigt är på både CNF och DNF? Varför/varför inte?

(b) Konvertera

$$(A \to B) \lor ((B \to A) \land ((C \to B) \to A))$$

till CNF och förenkla så långt som möjligt. Visa inte bara lösningen utan även lösningsvägen.

Svar

(a) Ja, till exempel $A \lor B \lor C$ som antingen kan betraktas bestå av en klausul som innehåller tre litteraler (CNF) eller tre distinkta klausuler som vardera innehåller en litteral (DNF).

(b) En av många möjligheter:

0) $(A \to B) \vee ((B \to A) \wedge ((C \to B) \to A))$
1) $(\neg A \vee B) \vee ((\neg B \vee A) \wedge (\neg(\neg C \vee B) \vee A))$
2) $(\neg A \vee B) \vee ((\neg B \vee A) \wedge ((C \wedge \neg B) \vee A))$
3) $(\neg A \vee B) \vee ((\neg B \vee A) \wedge ((C \vee A) \wedge (\neg B \vee A)))$
4) $((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \wedge ((\neg A \vee B) \vee ((C \vee A) \wedge (\neg B \vee A)))$
5) $((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \wedge (((\neg A \vee B) \vee (C \vee A)) \wedge ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)))$
6) $(\neg A \vee B \vee \neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg B \vee A)$
7) $\top \wedge \top \wedge \top$
8) $\top$

Förklaring av stegen:

1) Eliminera $\to$ och $\leftrightarrow$.
2) Flytta in $\neg$ till atomerna.
3) Distrubutivlagen.
4) Distrubutivlagen.
5) Distrubutivlagen.
6) Stryk överflödiga paranteser.
7) Förenkla.
8) Förenkla.

Uppgift 4 **2 + 2 poäng**

Låt

$$\varphi = (\forall x)(\forall y)(R_1(f_1(x,y), f_2(x,y)) \leftrightarrow R_1(c_1, f_3(x,y)))$$

vara en mening i en första ordningens predikatlogik som inte innehåller fler relationssymboler, funktionssymboler eller konstanter.

(a) Definiera en tolkning J som är en modell av φ.

(b) Definiera en tolkning J' som inte är en modell av φ.

Svar

(a)
- Domän $= \mathbb{N}^+$,
- $R_1 =<$,
- $c_1 = 1$,
- $f_1 = lcm$, $f_2 = \times$, och $f_3 = gcd$.

(b) som för (a), men nu låter vi $c_1 = 2$.

Uppgift 5 **2 + 2 poäng**

(a) Visa meningen φ' som är resultatet av att applicera skolemisering på meningen

$$\varphi = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x, c_0) \to P(f(x,z), y)) \ .$$

(b) En modell av φ i (a) är tolkningen J där

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{dom}(J) & = & \mathbb{Q}, \\ c_0 & = & 0, \\ P^J(u,v) & = & u = v, \text{ och} \\ f^J(u,v) & = & u \times v \ . \end{array}$$

Utvidga J till en modell av φ' genom att tilldela lämpliga funktioner till funktionssymboler som nu förekommer i φ' men inte i φ. En liten påminnelse; $\mathbb{Q}$ är mängden av alla rationella tal (ett rationellt tal kan alltid skrivas på formen $\frac{m}{n}$ där $n \neq 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$).

Svar

(a) Efter skolemisering blir φ till

$$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x, c_0) \to P(f(x, f_z(x, y)), y)) \ .$$

(b) Tolkningen J utökas med

$$f_z^J(u, v) \quad = \quad v/u \ .$$

Uppgift 6 **2 + 6 poäng**

(a) Vad är en *unifierare* av atomära formler φ och φ' och när sägs den vara *mest generell*?

(b) Visa med hjälp av följande exempel hur algoritmen för att konstruera den mest generella unifieraren fungerar (där w, x, y, z är variablerna):

$$\begin{array}{rcl} P(g(y,z),x) & \text{och} & P(g(f(z), f(f(w))), f(y)) \\ P(g(x), f(y)) & \text{och} & P(g(g(y)), f(x)) \\ P(x, g(z,z)) & \text{och} & P(f(y), g(a,x)). \end{array}$$

Svar

(a) En unifierare av φ och φ' är en substitution σ sådan att $\varphi\sigma = \varphi'\sigma$. Den är mest generell om alla övriga unifierare σ' av φ och φ' kan skrivas som $\sigma\sigma_0$ för en lämplig substitution σ_0.

(b) I form av tabeller (där $f^i(t) = \underbrace{f(\cdots f(}_{i} t) \cdots)$ i första tabellen):

s_1, s_2	t_1, t_2	σ_{mgu}
$g(y,z), x$	$g(f(z), f^2(w)), f(y)$	
$g(f(z), z), x$	$g(f(z), f^2(w)), f(f(z))$	$f(z)/y$
$g(f^3(w), f^2(w)), x$	$g(f^3(w), f^2(w)), f^4(w)$	$f^3(w)/y, f^2(w)/z$
$g(f^3(w), f^2(w)), f^4(w)$	$g(f^3(w), f^2(w)), f^4(w)$	$f^3(w)/y, f^2(w)/z, f^4(w)/x$
Klar – mgu:n är $\{f^4(w)/x, f^3(w)/y, f^2(w)/z\}$		

s_1, s_2	t_1, t_2	σ_{mgu}
$g(x), f(y)$	$g(g(y)), f(x)$	
$g(g(y)), f(y)$	$g(g(y)), f(g(y))$	$g(y)/x$
Avbrott – $g(y)$ innehåller y!		

s_1, s_2	t_1, t_2	σ_{mgu}
$x, g(z,z)$	$f(y), g(a,x)$	
$f(y), g(z,z)$	$f(y), g(a, f(y))$	$f(y)/x$
$f(y), g(a,a)$	$f(y), g(a, f(y))$	$f(y)/x, a/z$
Avbrott – ingen av $a, f(y)$ är en variabel!		

Uppgift 7 **8 poäng**

OBS! Välj exakt **ett** av följande alternativ. Om svarsförsök på både (i) och (ii) lämnas in rättas bara svaret på (i).

(i) Visa mha ett resolutionsbevis att klausulmängden

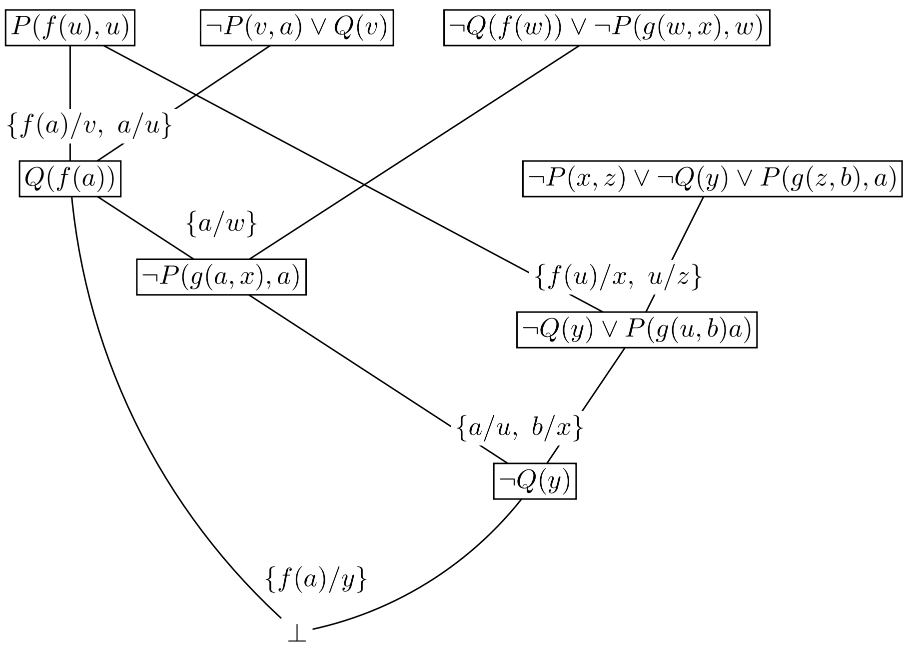
$$\begin{aligned}\Phi = \{\ & P(f(u),u),\\ & \neg P(v,a) \vee Q(v),\\ & \neg Q(f(w)) \vee \neg P(g(w,x),w),\\ & \neg P(y,z) \vee \neg Q(y) \vee P(g(z,b),a)\ \}\end{aligned}$$

(där $u,\ldots,z$ är variablerna) är motsägelsefull. Beviset ska ritas som en graf. Den ska, för varje resolutionssteg, inte bara visa den resulterande formeln utan också mgu:n som ligger till grund för resolutionssteget. Förutom $\perp$ ska grafen inte innehålla onyttiga formler, dvs formler som inte används i något senare steg.

(ii) Bevisa att Resolution för satslogik är sunt, dvs att $\Phi \vdash_{\mathbf{Res}} \varphi$ implicerar $\Phi \models \varphi$.

Svar

(i) En av många lösningar:



(ii) Beviset finns i oh-serien Resolution (del 2) på sida 4.