Substitution och unifiering

- Exempel – varför behövs substitution?
- Substitution
- Unifiering
- Den mest generella unifieraren

Resolution kräver substitution – ett enkelt exempel

Gäller $\{(\forall x)(\text{Fågel}(x) \rightarrow \text{Vingar}(x)),\ \text{Fågel}(\text{Kalle\_A})\} \models \text{Vingar}(\text{Kalle\_A})$?

Normalisering ger klausulerna
1. $\neg\text{Fågel}(x) \vee \text{Vingar}(x)$,
2. $\text{Fågel}(\text{Kalle\_A})$,
3. $\neg\text{Vingar}(\text{Kalle\_A})$.

Man borde kunna använda resolution på 1 och 2 men det kräver att Kalle_A först substitueras för x:

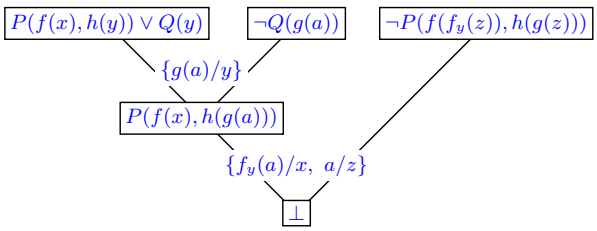
$$\neg\text{Fågel}(x) \vee \text{Vingar}(x) \xrightarrow{\{\text{Kalle\_A}/x\}} \neg\text{Fågel}(\text{Kalle\_A}) \vee \text{Vingar}(\text{Kalle\_A})$$

Resolution ger nu $\text{Vingar}(\text{Kalle\_A})$ och sedan $\bot$ pga klausul 3.

Resolution kräver substitution – ett komplexare exempel

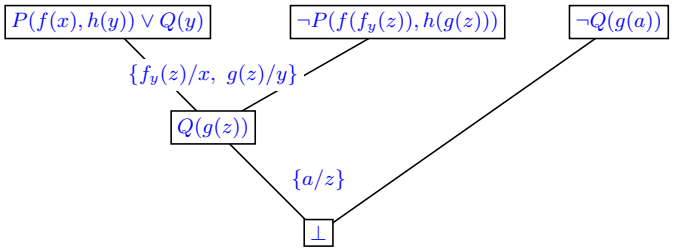
$$\{(\forall x)(\forall y)(P(f(x), h(y)) \vee Q(y)),\ (\forall x)(\neg Q(g(a)))\} \models (\exists x)(\forall y)(P(f(y), h(g(x))))$$

Normalisering ger klausulerna
1. $P(f(x), h(y)) \vee Q(y)$,
2. $\neg Q(g(a))$,
3. $\neg P(f(f_y(z)), h(g(z)))$.



Samma exempel i en annan ordning

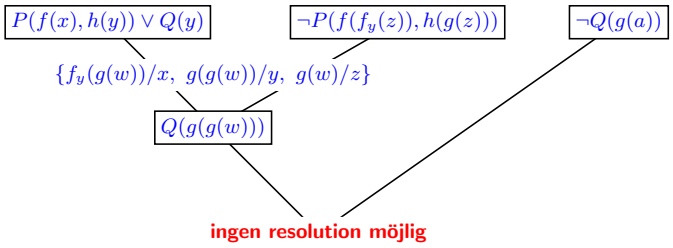
1. $P(f(x), h(y)) \vee Q(y)$,
2. $\neg Q(g(a))$,
3. $\neg P(f(f_y(z)), h(g(z)))$.



Problem: Substitutionen får inte vara för speciell

När termer substitueras för variabler specialiseras formeln. T ex är $\neg$Fågel(Kalle_A) $\vee$ Vingar(Kalle_A) en specialisering av $\neg$Fågel(x) $\vee$ Vingar(x).

Problem: Är den speciellare än nödvändigt kan det hindra senare resolutionssteg.



Substitution

- En substitution är en funktion $\sigma\colon \mathbf{V} \to \text{terms}(\mathbf{T})$ där $\sigma(x) = x$ för alla utom ändligt många $x \in \mathbf{V}$. Traditionellt skrivs $x\sigma$ istället för $\sigma(x)$.
- En substitution är alltså en funktion på den här formen:

$$x\sigma = \begin{cases} t_1 & \text{om } x = x_1 \\ \vdots & \\ t_n & \text{om } x = x_n \\ x & \text{annars.} \end{cases}$$

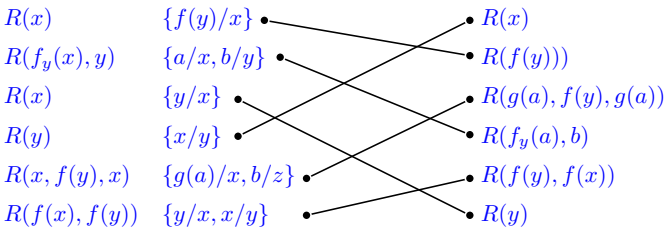
  Den skrivs därför vanligtvis som en mängd $\{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$.
- För $t \in \text{terms}(\mathbf{T})$ betecknar $t\sigma$ termen som fås av t genom att simultant ersätta varje förekomst av en variabel x med $x\sigma$.
- Med andra ord, varje x_i ersätts med t_i ($1 \leq i \leq n$) medan de övriga variablerna inte påverkas.

Uppgift 1

Para ihop varje tuppel av en formel φ och en substituering σ med den resulterande formeln $\varphi\sigma$.

$R(x)$	$\{f(y)/x\}$	$R(x)$
$R(f_y(x), y)$	$\{a/x, b/y\}$	$R(f(y)))$
$R(x)$	$\{y/x\}$	$R(g(a), f(y), g(a))$
$R(y)$	$\{x/y\}$	$R(f_y(a), b)$
$R(x, f(y), x)$	$\{g(a)/x, b/z\}$	$R(f(y), f(x))$
$R(f(x), f(y))$	$\{y/x, x/y\}$	$R(y)$

Lösning 1



Unifierare

En substitution appliceras på en klausul genom att applicera den på alla termer i klausulen. En unifierare för atomära formler φ, φ' är en substitution σ sådan att $\varphi\sigma = \varphi'\sigma$.

Kompositionen av substitutioner skrivs $\sigma_1\sigma_2$ (först σ_1 sedan σ_2), alltså $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$ för alla $x \in \mathbf{V}$ (vilket ger $t(\sigma_1\sigma_2) = (t\sigma_1)\sigma_2$ för alla termer t, så att vi istället kan skriva $t\sigma_1\sigma_2$).

Exempel: Låt $\sigma = \{f(x)/y, a/z\}$ och $\sigma' = \{g(b)/x, b/z\}$. Då blir

$$R(y,z)(\sigma\sigma') \;=\; (R(y,z)\sigma)\sigma' \;=\; R(f(x),a)\sigma' \;=\; R(f(g(b)),a)$$

om vi applicerar σ och σ' i tur och ordning. Men vi kan även komponera en ny substitution och applicera den direkt: $\sigma\sigma' = \{f(g(b))/y, a/z\}$ och

$$R(y,z)\sigma\sigma' \quad = \quad R(f(g(b)),a) \;\; .$$

Unifierare (2)

Exemplen visade att det behövs en unifierare av φ och φ' för att kunna köra resolution på $\varphi, \neg\varphi'$ men unifieraren bör inte vara för speciell!

Men vad betyder "speciell" precist?

En substitution σ_1 är generellare än en substitution σ_2 om det finns en tredje substitution σ sådan att $\sigma_2 = \sigma_1\sigma$. (OBS! Det är möjligt att σ_2 i sin tur är generellare än σ_1. Då är σ bara är ett namnbyte. "Generellare" är alltså snarare "minst lika generell".)

Exempel: Låt $\sigma_1 = \{f(y)/x, y/y\}$ och $\sigma_2 = \{f(z)/x, z/y\}$ vara två substitutioner. Vi kan se att σ_1 och σ_2 lika generella eftersom det finns två substitutioner $\sigma_1' = \{z/y\}$ och $\sigma_2' = \{y/z\}$ så att $\sigma_1 = \sigma_2\sigma_2'$ och $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_1'$.

Uppgift 2

Hitta en lämplig unifierare till varje formelpar.

$R(x)$	$R(y)$
$R(g(a))$	$R(x)$
$R(y)$	$R(y)$
$R(z, f(z))$	$R(a, x)$
$R(g(x))$	$R(f(y))$
$R(x)$	$R(f(x))$

Lösning 2

Det första och tredje paret har oändligt många unifierare. Det andra och fjärde paret har exakt en unifierare vardera, medan de två sista paren saknar unifierare.

$R(x)$	$R(y)$	$\{x/y\}, \{y/x\}, \{a/x, a/y\}, \ldots$
$R(g(a))$	$R(x)$	$\{g(a)/x\}$
$R(y)$	$R(y)$	$\{\}, \{a/y\}, \{x/y\}, \{g(f(g(b)))/y\}, \ldots$
$R(z, f(z))$	$R(a, x)$	$\{a/z, f(a)/x\}$
$R(g(x))$	$R(f(y))$	–
$R(x)$	$R(f(x))$	–

Den mest generella unifieraren

Definition En unifierare σ av atomära formler φ, φ' är mest generell om den är generellare än alla övriga unifierare av φ, φ'.

Teorem Låt φ, φ' vara atomära formler.

1. Om både σ_1 och σ_2 är mest generella unifierare så är de lika upp till namnbyte, dvs det finns en bijektiv substitution $\sigma\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sådan att $\sigma_2 = \sigma_1\sigma$ och $\sigma_1 = \sigma_2\sigma^{-1}$.
2. Om φ och φ' har en unifierare så har de även en mest generell unifierare (mgu). Pga del 1 är mgu:n unik upp till namnbyte.
3. Det finns en algoritm som prövar om φ, φ' har en mgu σ och returnerar σ om så är fallet.

En effektiv algoritm för att hitta mgu:n

Robinsons algoritm är ett sätt att beräkna mgu:n för atomära formler φ, φ'.

Indata: Atomära formler $\varphi = R(s_1, \ldots, s_n)$ och $\varphi' = R(t_1, \ldots, t_n)$.

Algoritm:

1. $\sigma_{\text{mgu}} := \{\}$ (initialisering)
2. Om $\varphi = \varphi'$ returnera σ_{mgu}. Annars hitta första positionen där symbolerna i φ och φ' är olika. Betrakta deltermerna som börjar vid den positionen.
   (a) Om en av dem är en variabel x och den andra är en term t som inte innehåller x, tilldela
   $$\varphi := \varphi\sigma,\ \varphi' := \varphi'\sigma \text{ och } \sigma_{\text{mgu}} := \sigma_{\text{mgu}}\sigma$$
   där $\sigma = \{t/x\}$ och upprepa steg 2.
   (b) Annars avbryt algoritmen – ingen unifierare finns.

Exempel 1

Mgu:n för $R(x, f(y,y), g(w))$ och $R(g(z), z, g(x))$ (där $w, x, y, z \in \mathbf{V}$) finns:

$s_1, \ldots, s_n$	$t_1, \ldots, t_n$	σ_{mgu}
$x, f(y,y), g(w)$	$g(z), z, g(x)$	
$g(z), f(y,y), g(w)$	$g(z), z, g(g(z))$	$g(z)/x$
$g(f(y,y)), f(y,y), g(w)$	$g(f(y,y)), f(y,y), g(g(f(y,y)))$	$g(f(y,y))/x, f(y,y)/z$
$g(f(y,y)), f(y,y), g(g(f(y,y)))$	$g(f(y,y)), f(y,y), g(g(f(y,y)))$	$g(f(y,y))/x, f(y,y)/z, g(f(y,y))/w$

Exempel 2, 3

Det finns ingen unifierare för $R(x, x, g(y))$ och $R(g(z), z, g(x))$

$s_1, \ldots, s_n$	$t_1, \ldots, t_n$	σ_{mgu}
$x, x, g(y)$	$g(z), z, g(x)$	
$g(z), g(z), g(y)$	$g(z), z, g(g(z))$	$g(z)/x$
avbrott eftersom z förekommer i $g(z)$		

och inte heller någon för $R(x, x, g(y))$ och $R(g(z), f(a, a), g(x))$

$s_1, \ldots, s_n$	$t_1, \ldots, t_n$	σ_{mgu}
$x, x, g(y)$	$g(z), f(a, a), g(x)$	
$g(z), g(z), g(y)$	$g(z), f(a, a), g(g(z))$	$g(z)/x$
avbrott eftersom varken $g(z)$ eller $f(a, a)$ är en variabel		