

Första ordningens predikatlogik – ytterligare basbegrepp

- Kvantifierarnas räckvidd, fria variabler
- Slutna meningar
- Modell, tautologi, satisfierbar, logisk konsekvens

Kvantifierarnas räckvidd, fria variabler

Räckvidden för en kvantifierare i en wff $\dots(\forall x)(\varphi)\dots$ eller $\dots(\exists x)(\varphi)\dots$ omfattar alla förekomster av x i delformeln φ med undantag av de som i sin tur tillhör en delformel av φ på formen $(\forall x)(\varphi')$ eller $(\exists x)(\varphi')$.

Variablerna inom räckvidden för en kvantifierare är alltså de som kvantifieraren syftar på. (Konceptet liknar räckvidden för en variabel i ett programspråk med lexikalisk räckvidd.)

$$\underbrace{(\exists \underline{x})(R(\underline{x}) \wedge (\forall \underline{x})(Q(\underline{x}, \underline{y}))) \vee (\forall \underline{y})(Q(f(\underline{x}, \underline{y})))}_{\text{}} \rightarrow R(x)$$

En (förekomst av en) variabel är **bunden** om den ligger inom räckvidden för någon kvantifierare och **fri** annars. I exemplet är alla blå variabler fria och de övriga är bundna.

Meningar

- En (sluten) **mening** är en formel som inte innehåller fria variabler.
- Antag att en tolkning J har valts. En mening har då alltid ett unikt sanningsvärde.
- En formel φ med en fri variabel x är däremot ett parametriserat påstående vars sanningsvärde beror på x :s värde (alltså på J -värderingen $w(x)$ av x).
- I en databas skulle J motsvara databasens innehåll och φ skulle specificera en **förfrågan** (*query*). Systemets uppgift vore att finna och returnera alla objekt $d \in \text{dom}(J)$ som uppfyller $w_{x=d}(\varphi) = 1$.
- Om flera variabler x_1, \dots, x_n är fria så returneras alla $(d_1, \dots, d_n) \in \text{dom}(J)^n$ som uppfyller $w_{x_1=d_1 \dots x_n=d_n}(\varphi) = 1$.

Varje mening har ett unikt sanningsvärde

Teorem Låt φ vara en mening i en predikatlogik L och J en tolkning. För alla J -värderingar v, w gäller $\bar{v}(\varphi) = \bar{w}(\varphi)$. Med andra ord, meningens semantik beror endast på J .

Det formella beviset kan delas upp i två steg:

Steg 1: För varje term t , om $v(x) = w(x)$ för alla variabler x som förekommer i t så gäller $v(t) = w(t)$.

Steg 2: För varje formel ψ , om $v(x) = w(x)$ för alla variabler x som förekommer fritt i ψ så gäller $\bar{v}(\psi) = \bar{w}(\psi)$.

I båda steg används induktion över termens respektive formelns struktur. De för oss intressantaste fallen är $\psi = (\forall x)(\psi')$ och $\psi = (\exists x)(\psi')$.

Pga teoremet används i fortsättningen i samband med meningars notationen φ^J istället för $\bar{v}(\varphi)$ (och v specificeras inte).

Exempel

I formeln nedan är en tolkning redan vald.

$$(\forall x)((x > 1) \wedge \text{är_udda}(x)) \rightarrow (\neg \text{är_print}(x + 1))$$

Det är nu ganska lätt att se att det inte spelar någon roll vilken värdering man väljer, eftersom sanningsvärdet av formeln φ ges av följande:

$$\begin{aligned}\overline{w}(\forall x)(\varphi) &= \min\{\overline{w}_{x=d}(\varphi) \mid d \in \text{dom}(J)\} \\ \overline{w}(\exists x)(\varphi) &= \max\{\overline{w}_{x=d}(\varphi) \mid d \in \text{dom}(J)\}.\end{aligned}$$

Modell, tautologi, satisfierbarhet, logisk följd

Låt φ vara en mening och Φ en mängd av meningar i en predikatlogik \mathbf{L} och J en tolkning. Följande begrepp definieras på ett liknande sätt som i satslogiken:

- J är en **modell** av φ om $\varphi^J = 1$.
- J är en **modell** av Φ om $\psi^J = 1$ för varje $\psi \in \Phi$.
- Mängden av alla modeller av φ och Φ skrivs $\text{Mod}(\varphi)$ respektive $\text{Mod}(\Phi)$.
- φ är **satisfierbar** om $\text{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$.
- φ är en **tautologi** om $\text{Mod}(\varphi)$ är mängden av alla tolkningar.
- $\Phi \models \varphi$ om $\text{Mod}(\Phi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$, alltså om varje modell av Φ också är en modell av φ .