Första ordningens predikatlogik – ytterligare basbegrepp

- Kvantifierarnas räckvidd, fria variabler
- Slutna meningar
- Modell, tautologi, satisfierbar, logisk konsekvens

Kvantifierarnas räckvidd, fria variabler

Räckvidden för en kvantifierare i en wff $\cdots(\forall x)(\varphi)\cdots$ eller $\cdots(\exists x)(\varphi)\cdots$ omfattar alla förekomster av x i delformeln φ med undantag av de som i sin tur tillhör en delformel av φ på formen $(\forall x)(\varphi')$ eller $(\exists x)(\varphi')$.

Variablerna inom räckvidden för en kvantifierare är alltså de som kvantifieraren syftar på. (Konceptet liknar räckvidden för en variabel i ett programspråk med lexikalisk räckvidd.)

$$(\exists \underline{x})(\underbrace{(R(\underline{x}) \land (\forall \underline{x})(\underbrace{Q(\underline{x}, y)})) \lor (\forall \underline{y})(\underbrace{Q(f(\underline{x}), \underline{y})})}) \to R(x)$$

En (förekomst av en) variabel är bunden om den ligger inom räckvidden för någon kvantifierare och fri annars. I exemplet är alla blå variabler fria och de övriga är bundna.

Meningar

- En (sluten) mening är en formel som inte innehåller fria variabler.
- Antag att en tolkning J har valts. En mening har då alltid ett unikt sanningsvärde.
- En formel φ med en fri variabel x är däremot ett parametriserat påstående vars sanningsvärde beror på x:s värde (alltså på J-värderingen $w(x)$ av x).
- I en databas skulle J motsvara databasens innehåll och φ skulle specificera en förfrågan (*query*). Systemets uppgift vore att finna och returnera alla objekt $d \in \mathsf{dom}(J)$ som uppfyller $w_{x=d}(\varphi) = 1$.
- Om flera variabler $x_1, \ldots, x_n$ är fria så returneras alla $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathsf{dom}(J)^n$ som uppfyller $w_{x_1=d_1 \cdots x_n=d_n}(\varphi) = 1$.

Varje mening har ett unikt sanningsvärde

Teorem Låt φ vara en mening i en predikatlogik **L** och J en tolkning. För alla J-värderingar v, w gäller $\overline{v}(\varphi) = \overline{w}(\varphi)$. Med andra ord, meningens semantik beror endast på J.

Det formella beviset kan delas upp i två steg:

Steg 1: För varje term t, om $v(x) = w(x)$ för alla variabler x som förekommer i t så gäller $v(t) = w(t)$.

Steg 2: För varje formel ψ, om $v(x) = w(x)$ för alla variabler x som förekommer fritt i ψ så gäller $\overline{v}(\psi) = \overline{w}(\psi)$.

I båda steg används induktion över termens respektive formelns struktur. De för oss intressantaste fallen är $\psi = (\forall x)(\psi')$ och $\psi = (\exists x)(\psi')$.

Pga teoremet används i fortsättningen i samband med meningar notationen φ^J istället för $\overline{v}(\varphi)$ (och v specificeras inte).

Exempel

I formeln nedan är en tolkning redan vald.

$$(\forall x)(((x > 1) \wedge \text{är\_udda}(x)) \rightarrow (\neg \text{är\_primt}(x + 1)))$$

Det är nu ganska lätt att se att det inte spelar någon roll vilken värdering man väljer, eftersom sanningsvärdet av formeln φ ges av följande:

$$\begin{aligned} \overline{w}((\forall x)(\varphi)) &= \min\{\overline{w}_{x=d}(\varphi) \mid d \in \mathsf{dom}(J)\} \\ \overline{w}((\exists x)(\varphi)) &= \max\{\overline{w}_{x=d}(\varphi) \mid d \in \mathsf{dom}(J)\}. \end{aligned}$$

Modell, tautologi, satisfierbarhet, logisk följd

Låt φ vara en mening och Φ en mängd av meningar i en predikatlogik **L** och J en tolkning. Följande begrepp definieras på ett liknande sätt som i satslogiken:

- J är en modell av φ om $\varphi^J = 1$.
- J är en modell av Φ om $\psi^J = 1$ för varje $\psi \in \Phi$.
- Mängden av alla modeller av φ och Φ skrivs $\mathrm{Mod}(\varphi)$ respektive $\mathrm{Mod}(\Phi)$.
- φ är satisfierbar om $\mathrm{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$.
- φ är en tautologi om $\mathrm{Mod}(\varphi)$ är mängden av alla tolkningar.
- $\Phi \models \varphi$ om $\mathrm{Mod}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$, alltså om varje modell av Φ också är en modell av φ.