Första ordningens predikatlogik – syntax och semantik

- Signaturer och termer
- Första ordningens predikatlogik
- Formler och deras semantik

Signaturer och termer

En signatur innehåller de variabler, konstanter och funktionssymboler som får förekomma i en predikatlogik.

- En signatur är en trippel $\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ bestående av en uppräkningsbar mängd $\mathbf{V}$ av variabler och mängder $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$ av konstanter och funktionssymboler. Varje funktionssymbol $f \in \mathbf{F}$ har en ställighet $\mathsf{arity}(f)$, som är ett naturligt tal > 0. Mängderna $\mathbf{V}$, $\mathbf{K}$ och $\mathbf{F}$ ska vara disjunkta.
- För att tydliggöra att en symbol f antas ha ställighet n (dvs $\mathsf{arity}(f) = n$) skrivs ibland $f^{(n)}$.

Definition Mängden $\mathsf{terms}(\mathbf{T})$ av alla termer över $\mathbf{T}$ är den minsta mängden av strängar sådan att

(i) $\mathbf{V} \cup \mathbf{K} \subseteq \mathsf{terms}(\mathbf{T})$ och

(ii) $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{terms}(\mathbf{T})$ för alla $f^{(n)} \in \mathbf{F}$ och $t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{terms}(\mathbf{T})$.

Uppgift 1

Låt $\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ vara en signatur där

- $\mathbf{V} = \{x_1, x_2, \ldots\}$,
- $\mathbf{K} = \{1, 0, \pi\}$, och
- $\mathbf{F} = \{+^{(2)}, \times^{(2)}, -^{(2)}, -^{(1)}\}$.

Vilka av följande strängar tillhör då $\mathsf{terms}(\mathbf{T})$?

(a) x_1	(e) $+(1, +(1, x_4), x_4)$
(b) π	(f) $+(\pi, x_7)$
(c) c	(g) $\times(x_1, -(\pi))$
(d) $\times(x_1, 0)$	(h) $-(-(-(-(1))), -(\pi, 1))$

Lösning 1

(a) Ok, ty $x_1 \in \mathbf{V}$	(e) Inte ok, då $+$ kräver exakt två argument.
(b) Ok, ty $\pi \in \mathbf{K}$	(f) Ok.
(c) Inte ok, ty $c \notin \mathbf{V} \cup \mathbf{K}$	(g) Ok, det finns en funktion $-^{(1)}$.
(d) Ok.	(h) Ok.

Uppgift 2

Vilka av följande tripplar är signaturer?

(a) $(\emptyset,$
$\{c_1, c_2, c_3\},$
$\{f_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\})$

(b) $(\{x_i \mid i \in \mathbb{R}\},$
$\{2, 3, 5, 7, 11\},$
$\{+^{(2)}, -^{(1)}, -^{(2)}, *^{(2)}, /^{(2)}\})$

(c) $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\},$
$\{c_j \mid j \in \mathbb{R}\},$
$\{f_k^{(2)} \mid k \in \mathbb{R}\})$

Lösning 2

Trippel (a) är en signatur. Definitionen hindrar inte att en variabel-, konstant- och funktionsmängder är tom eller oändlig. Däremot krävs att variabelmängden är uppräkningsbar, vilket hindrar oss från att använda de reella talen som index på variablerna och därmed är (b) ingen signatur. Att mängden av konstanter eller funktioner inte är uppräkningsbara bryter dock inte mot definitionen, så (c) är en signatur.

Uppgift 3

Om $\mathbf{T} = (\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\pi, 1\}, \{+^{(2)}, -^{(1)}, -^{(2)}\})$ är en signatur, vilka av följande strängar tillhör då terms($\mathbf{T}$)?

(a) x_2 (c) $x_2 + \pi$ (e) $+(-(\pi, x_0), 1)$

(b) π (d) $+(x_2, \pi)$ (f) $-(+(x_{100}, x_{200}))$

Och om $\mathbf{T} = (\emptyset, \{\textsc{Jag}, \textsc{Skype}\}, \{\textsc{Friends}^{(1)}, \cup^{(2)}, \cap^{(2)}\})$?

(a) $\textsc{Jag}$ (c) x_2

(b) $\textsc{Skype}$ (d) $\textsc{Friends}(\textsc{Jag})$

(e) $\cap(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Jag})), \textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Skype})))$

(f) $\cap(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Jag})))), \textsc{Skype})$

Lösning 3

I första definitionen av $\mathbf{T}$ var det bara (c) som inte tillhörde mängden termer över $\mathbf{T}$, eftersom alla funktioner skrivs som prefix om inte annat uttryckligen sägs. Även i andra fallet var det bara (c) som inte följde definitionen av termer. Den här gången berodde det på att mängden av variabler är tom och innehåller alltså inte x_2.

Första ordningens predikatlogik

Definition En första ordningens predikatlogik (kort predikatlogik) är en quadrupel $\mathbf{L} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{T})$ där

- $\mathbf{R}$ är en mängd av relationssymboler där varje $R \in \mathbf{R}$ har en ställighet arity(R) ≥ 0,
- $\mathbf{C} \subseteq \{\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}$ är mängden av konnektiv (alltså som i satslogiken fast med ytterligare konnektiv $\forall, \exists$),
- mängden $\mathbf{A}$ som består av (,) och , är mängden av hjälpsymboler och
- $\mathbf{T}$ är en signatur.

Det krävs att alla symbolmängder är disjunkta. Om inget annat sägs antas att $\mathbf{C} = \{\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}$.

Uppgift 4

Vilka av följande quadrupler kan sägas vara predikatlogiker?

(a) $(\{R_1^{(0)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}, R_4^{(2)}\},$
$\{\neg, \vee, \exists, \forall\},$
$\{(,), ,\},$
$(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{c_1\}, \{f_1^{(0)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}\}))$

(b) $(\{A^{(0)}, B^{(0)}, C^{(0)}\},$
$\{\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \leftrightarrow, \bot, \top\},$
$\{(,), ,\},$
$(\emptyset, \emptyset, \emptyset))$

(c) $(\{=^{(2)}, <^{(2)}, >^{(2)}\},$
$\{\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg\},$
$\{(,), .\},$
$(\{x, y, z\}, \{\exists, \forall\}, \{\vee^{(2)}, \wedge^{(1)}, \wedge^{(2)}\}))$

Lösning 4

Att (a) är en predikatlogik är det ganska lätt att se. Även (b) är en predikatlogik, men eftersom möjligheten att skriva termer inte kan utnyttjas, och eftersom allkvantor och existenskvantor saknas bland konnektiven, så motsvarar (b) mer eller mindre en vanlig satslogik. I det tredje fallet, dvs (c), tittar vi inte längre på någon predikatlogik. Dels har hjälpsymbolen "komma" bytts ut mot en punkt, och dels är mängderna av variabler, konstanter och konnektiv inte disjunkta.

Välformade formler

Bortsett från kvantifierarna består den enda skillnaden mellan välformade formler i predikatlogiken och satslogiken i atomerna som är odelbara symboler i satslogiken men blir numera atomära formler.

Definition Låt $\mathbf{L} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{T})$ vara en predikatlogik.

- En atomär formel är en sträng på formen $R(t_1, \ldots, t_n)$ där $R^{(n)} \in \mathbf{R}$ och $t_1, \ldots, t_n \in$ terms($\mathbf{T}$). Mängden av dessa formler skrivs atoms($\mathbf{L}$).
- Mängden $\mathrm{WF}(\mathbf{L})$ av välformade formler (kort formler) definieras som i satslogiken, dock med följande ändring respektive tillägg:
  - De minsta formlerna är numera de atomära formlerna i atoms($\mathbf{L}$) (istället för atomerna i $\mathbf{P}$).
  - För alla variabler $x \in \mathbf{V}$ och formler $\varphi \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ är också $(\forall x)(\varphi)$ och $(\exists x)(\varphi)$ element i $\mathrm{WF}(\mathbf{L})$.

Exempel

Med **K** $= \{a, b\}$, **F** $= \{f^{(2)}, g^{(1)}\}$ och **R** $= \{Q^{(2)}, R^{(0)}, S^{(1)}\}$ är följande en wff (där samma notationsförenklingarna som i satslogiken används och $x, y \in$ **V**):

$$Q(f(g(a), x), b) \wedge (\forall x)(S(g(f(a, f(y, y)))) \rightarrow (R() \vee S(x)))$$

Alla termer är understrukna i blått och alla atomära formler i rött.

Uppgift 5

Om

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = (&\{R_1^{(0)}, R_2^{(1)}, R_3^{(2)}\}, \\ &\{\exists, \forall, \neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \leftrightarrow, \bot, \top\}, \\ &\{(,), , \}, \\ &(\{x, y, z\}, \{c_1, c_2\}, \{f_1^{(2)}, f_2^{(2)}\})) \end{aligned}$$

är en predikatlogik, vilka av följande strängar tillhör då $\mathrm{WF}(\mathbf{L})$?

(a) R_1	(f) $R_3(f_2(c_1, c_2))$
(b) $f_1(x, y)$	(g) $R_1 \wedge R_3(f_2(c_1, c_2), z)$
(c) $R_3(z, z)$	(h) $(\forall y)((\exists x)(\top \vee R_3(f_1(x, y), c_2)))$
(d) $(\exists x)(R_2(x))$	(i) $f_2(c_1, y) \rightarrow R_1$
(e) $\exists x\ R_2(x)$	(j) $(\exists x)(R_2(y))$

Lösning 5

(a) Ja, R_1 behöver tar inga argument och är en välformad formel i sig själv.
(b) Nej, bara en term är inte en välformad formel.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej, parenteser saknas. Jämför med (d).
(f) Nej, R_3 kräver två argument, inte ett.
(g) Ja, nu har R_3 fått ytterligare ett argument.
(h) Ja. Fortfarande helt ok.
(i) Nej, alla termer måste vara inneslutna i relationer.
(j) Ok, men lite meningslöst att binda x men inte utnyttja bindningen.

Blandade kommentarer

- Normalt används gemenerna x, y, z (möjligen med index eller streck) för att beteckna variabler.
- Konstanter kan ses som funktionssymboler med ställighet 0. Formellt är alltså uppdelningen i konstanter och funktionssymboler onödig.
- Observera att relationssymboler kan ha ställighet 0 motsvarande atomer i satslogiken. Satslogiken är därför ett specialfall av predikatlogiken.
- De minsta formlerna är de atomära formlerna. De består av en relationssymbol som appliceras på ett antal termer. Termer är inte formler utan ingår i atomära formler som relationssymbolernas argument.

Tolkningar (0)

Vad krävs för att en satslogisk formel skall kunna tilldelas ett sanningsvärde?

$$A \rightarrow (B \vee \neg C)$$

Vad krävs för att en predikatlogisk formel skall kunna tilldelas ett sanningsvärde?

$$R(f(x, y), a) \rightarrow (P(g(x, y), b) \wedge \neg\forall(z)(Q(f(x, y)) \vee Q(z)))$$

Tolkningar (1)

- I satslogiken är tolkningens enda syfte att tilldela varje atom ett sanningsvärde.
- I predikatlogiken har atomerna blivit ersatta med relationssymboler som tar termer som argument. Semantiskt sett betecknar varje term ett objekt. Konsekvenser:
  - Mängden av alla objekt som ligger till grund för tolkningen måste definieras (tolkningens domän).
  - Istället för att ha ett unikt sanningsvärde tolkas relationssymbolerna som relationer (eller predikat) vars sanningsvärde beror på argumenten.
  - Termernas värde beror i sin tur på tolkningen av konstanter och funktionssymboler.

Tolkningar (2)

Definition Låt $\mathbf{L} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{T})$ vara en predikatlogik där $\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \mathbf{K}, \mathbf{F})$. En tolkning J av $\mathbf{L}$ består av följande komponenter:

- En icke tom men i övrigt godtycklig mängd dom(J), tolkningens domän.
- En n-ställig relation $R^J \subseteq \text{dom}(J)^n$ för varje relationssymbol $R^{(n)} \in \mathbf{R}$.
  Relationen R^J betraktas som ett predikat $R^J : \text{dom}(J)^n \to \{0, 1\}$ som tar objekt $d_1, \ldots, d_n \in \text{dom}(J)$ som argument och returnerar sanningsvärdet 1 om $(d_1, \ldots, d_n) \in R^J$ och 0 annars.
- Ett objekt $K^J \in \text{dom}(J)$ för varje konstant $K \in \mathbf{K}$.
- En n-ställig funktion $f^J : \text{dom}(J)^n \to \text{dom}(J)$ för varje funktionssymbol $f^{(n)} \in \mathbf{F}$.

Observera att tolkningen inte specificerar variablernas värden!

Exempel

Låt

$$\varphi = R(f(x, y), a) \to (P(g(x, y), b) \land \neg\forall(z)(Q(f(x, y)) \lor Q(z)))$$

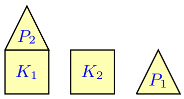
vara en predikatlogisk formel, och låt J vara en tolkning där ...

- domänen är heltalen,
- R är $>$, P är $<$, Q är IsPrime,
- a är 5, b är 10,
- f är $+$, och g är $-$.

Då översätter J formeln φ till

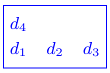
$$((x + y) > 5) \to (((x - y) < 10) \land \neg\forall(z)(\text{isPrime}(x + y) \lor \text{isPrime}(z))) \ .$$

Men! φ's sanningsvärde beror fortfarande på valet av x och y.

BV-exempel: En tolkning J som motsvarar  :

dom$(J) = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$

Symbol s	Tolkning s^J	Symbol s	Tolkning s^J
K_1^J	d_1	On_table^J	$\{(d_1), (d_2), (d_3)\}$
K_2^J	d_2	On^J	$\{(d_4, d_1)\}$
P_1^J	d_3	Is_cube^J	$\{(d_1), (d_2)\}$
P_2^J	d_4	Is_pyramid^J	$\{(d_3), (d_4)\}$



Om funktionssymbolen opposite$^{(1)}$ läggs till är förra föreläsningens tolkning den som fås genom att definiera

$$\text{opposite}^J(d_i) = \begin{cases} d_{i+2} & \text{om } i \in \{1, 2\} \\ d_{i-2} & \text{om } i \in \{3, 4\}. \end{cases}$$

Värderingar

Under en given tolkning J betecknar varje term ett objekt. Förutsättningen är dock att varje variabel tilldelas ett värde. Det är precis det en J-värdering gör.

Definition Låt $\mathbf{L} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{T})$ vara en predikatlogik och J en tolkning av $\mathbf{L}$. En funktion $w : \text{terms}(\mathbf{T}) \to \text{dom}(J)$ är en J-värdering om

(i) $w(K) = K^J$ för alla konstanter K av $\mathbf{T}$ och

(ii) $w(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^J(w(t_1), \ldots, w(t_n))$ för alla termer $f(t_1, \ldots, t_n) \in \text{terms}(\mathbf{T})$.

Alltså:

- $w(x)$ får väljas fritt för variabler $x \in \mathbf{V}$.
- w är entydigt fastlagt genom värdena $w(x)$ för varje $x \in \mathbf{V}$.

En nyttig notation är $w_{x=d}$ för $x \in \mathbf{V}$ och $d \in \text{dom}(J)$ som betecknar J-värderingen där $w_{x=d}(x) = d$ och $w_{x=d}(y) = w(y)$ för alla $y \in \mathbf{V} \setminus \{x\}$.

Exempel

Vi utgick ifrån den predikatlogiska formeln

$$\varphi = R(f(x, y), a) \to (P(g(x, y), b) \land \neg\forall(z)(Q(f(x, y)) \lor Q(z)))$$

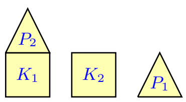
och valde tolkningen J där ...

- domänen är heltalen,
- R är $>$, P är $<$, Q är IsPrime,
- a är 5, b är 10,
- f är $+$, och g är $-$.

Formeln φ översattes då till

$$((x + y) > 5) \to (((x - y) < 10) \land \neg\forall(z)(\text{isPrime}(x + y) \lor \text{isPrime}(z))) \ .$$

Om vi därefter väljer en J värdering w som tilldelar x värdet 8, y värdet 1 och z värdet 7 får vi t.ex. att $w_{x=8,y=1,z=7}(x + y) = (8 + 1) = 9$, och $w_{x=8,y=1,z=7}(z) = 7$, så nu har alla termer ett värde.

BV-exempel: Betrakta igen  med

dom$(J) = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$

s	s^J	s	s^J
K_1^J	d_1	On_table^J	$\{(d_1), (d_2), (d_3)\}$
K_2^J	d_2	On^J	$\{(d_4, d_1)\}$
P_1^J	d_3	Is_cube^J	$\{(d_1), (d_2)\}$
P_2^J	d_4	Is_pyramid^J	$\{(d_3), (d_4)\}$

$$\text{opposite}^J(d_i) = \begin{cases} d_{i+2} \text{ om } i \in \{1, 2\} \\ d_{i-2} \text{ om } i \in \{3, 4\}. \end{cases}$$

- För varje J-värdering w gäller $w(\text{opposite}(P_1)) = d_1$.
- $w(\text{opposite}(x))$ beror på $w(x)$, t ex $w(\text{opposite}(x)) = d_4$ om $w(x) = d_2$.
- Pga definitionen av opposite^J gäller $w(\text{opposite}(\text{opposite}(x))) = w(x)$.
- $w_{x=d_1}(\text{opposite}(x)) = d_3$

Semantiken för formler

Varje J-värdering leder till ett sanningsvärde för en given formel – formelns semantik. Definitionen nedan rättar sig efter Alfred Tarskis.

Definition Låt **L** vara en predikatlogik. En J-värdering w för **L** utvidgas till en funktion $\overline{w}\colon \mathrm{WF}(\mathbf{L}) \to \{0,1\}$ så här:

(i) För alla atomära formler $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$

$$\overline{w}(\varphi) = R^J(w(t_1), \ldots, w(t_n)).$$

(ii) För alla variabler x och alla formler φ definieras

$$\begin{aligned} \overline{w}((\forall x)(\varphi)) &= \min\{\overline{w}_{x=d}(\varphi) \mid d \in \mathsf{dom}(J)\} \\ \overline{w}((\exists x)(\varphi)) &= \max\{\overline{w}_{x=d}(\varphi) \mid d \in \mathsf{dom}(J)\}. \end{aligned}$$

(iii) För alla övriga konnektiv är definitionen den som också användes i satslogiken (med $\overline{w}$ istället för $\overline{v}$).

Exempel

Alltså: Den predikatlogiska formeln

$$\varphi = R(f(x,y),a) \to (P(g(x,y),b) \land \neg\forall(z)(Q(f(x,y)) \lor Q(z)))$$

blir under tolkningen J och utvidningen $\overline{w}$ av J-värderingen $w_{x=8,y=1,z=7}$ till

$$((8+1) > 5) \to (((8-1) < 10) \land \neg\forall(z)(\mathrm{isPrime}(8+1) \lor \mathrm{isPrime}(z))) \ .$$

vilket som helhet har sanningsvärdet 1!