Första ordningens predikatlogik – informell inledning

- Satslogikens brister
- Relationssymboler, variabler, konstanter och kvantifierare
- Funktionssymboler och termer

Klassikern

{ Alla människor är dödliga. Sokrates är[a] en människa.} $\models$ Sokrates är dödlig.

- Satslogik är inte adekvat för att uttrycka det här eftersom det handlar om objekt (t ex Sokrates) och deras egenskaper (vara människa, vara dödlig).
- Satslogik handlar bara om förhållanden mellan primitiva påståenden. De må prata om objekt och egenskaper men det berör inte semantiken: Satslogiskt är slutsatsen ovan lika med $\{A, B\} \models C$ vilket självklart är fel.
- Vad som egentligen ska uttryckas är parametriserade förhållanden:

  (1) För alla objekt x gäller Människa$(x) \rightarrow$ Dödlig(x), vilket i synnerhet ger $(1')$ Människa(Sokrates) $\rightarrow$ Dödlig(Sokrates).

  (2) Dessutom gäller Människa(Sokrates), alltså pga $(1')$ och mha modus ponens Dödlig(Sokrates).

[a] ett tidlöst exempel i alla avseenden

Besvärligt att beskriva de tillåtna blockvärldarna satslogiskt

Ingen kub eller pyramid kan samtidigt ligga på bordet och på ett annat objekt.

- Med 2 kuber och 2 pyramider behövs 16 formler (eller deras konjunktion): $\neg(\mathsf{On\_table}(K_1) \wedge \mathsf{On}(K_1, K_1)), \neg(\mathsf{On\_table}(K_1) \wedge \mathsf{On}(K_1, K_2)), \ldots$
- Mycket smidigare är det att säga att villkoret gäller för alla objekt x, y:

$$(\forall x)(\forall y)(\neg(\mathsf{On\_table}(x) \wedge \mathsf{On}(x, y))).$$

  Tecknet '$\forall$' uttalas "för alla".
- Om vi inte vill specificera hur många kuber/pyramider finns i en värld (eller de är oändligt många) är det inte ens möjligt att räkna upp alla "förbud".
- Man kan också säga att det inte känns adekvat att betrakta $\mathsf{On\_table}(K_1)$ och $\mathsf{On\_table}(K_2)$ som strukturlösa namn för skilda atomära påståenden som lika väl skulle kunna heta A och B.

Relationssymboler, variabler, konstanter och kvantifierare

- Predikatlogiska formler handlar om egenskaper hos objekt. Varje tolkning har en domän som definierar vilka objekt som finns.
- Satslogikens atomer blir n-ställiga relationssymboler ($n \in \mathbb{N}$) som tar n argument. T ex betraktas On_table och Is_pyramid lämpligtvis som enställiga relationssymboler medan On borde vara en tvåställig symbol.
- Semantiskt står varje relationssymbol för en relation. Om den appliceras på n objekt (tillhörande domänen) fås ett sanningsvärde beroende på om argumenten tillhör relationen eller inte. T ex skulle $\mathsf{On}(x, y)$ svara på om x ligger på y eller inte.
- Variabler $x, y, z, \ldots$ kan beteckna godtyckliga objekt medan konstanter som K_1, K_2, P_1, P_2 betecknar specifika objekt.
- Kvantifierarna $\forall$ och $\exists$ används i samband med variabler för att uttrycka att något är sant för alla objekt eller för minst ett objekt.

Funktionssymboler och termer

- Utöver variabler och konstanter kan n-ställiga funktionssymboler förekomma. Semantiskt är de funktioner på tolkningens domän. De tar allså n objekt som argument och returnerar något annat objekt.
- Termer är uttryck som är sammansatta av variabler, konstanter och funktionssymboler. Semantiskt (dvs under en given tolkning) beskriver alltså varje term ett objekt.

Semantisk skillnad mellan relations- och funktionssymboler:
Både relationer och funktioner appliceras på objekt men i första fall är resultatet ett sanningsvärde medan det i andra fall är ett objekt tillhörande domänen.

Blockvärldsexemplet med en funktionssymbol

- Blockvärldsexemplet innehåller inget som motsvarar funktionssymboler. De enda termer som finns är således konstanterna K_1, K_2, P_1, P_2 och variabler.

- Vi kan dock t ex lägga till en enställig funktionssymbol opposite där $\mathsf{opposite}(K_i) = P_i$ och $\mathsf{opposite}(P_i) = K_i$. Man kan då t ex bygga formler som

  $$(\exists x)(\mathsf{Is\_pyramid}(x) \wedge \mathsf{On}(x, \mathsf{opposite}(x)))$$

  (minst en pyramid ligger på motsvarande kub) eller

  $$(\forall x)(\mathsf{Is\_cube}(x) \rightarrow \mathsf{Is\_cube}(\mathsf{opposite}(\mathsf{opposite}(x))))$$

  (appliceras opposite två gånger på en kub så fås en kub).

- Termerna i formlerna ovan är x, $\mathsf{opposite}(x)$, och $\mathsf{opposite}(\mathsf{opposite}(x))$.