Resolution i satslogiken (del 1)

- Antalet logiskt inekvivalenta formler
- Att begränsa antalet formler
- Resolution

Bevissystemet som baseras på resolution är det hittills mest framgångsrika försöket att definiera ett bevisssystem som lämpar sig för algoritmiska resonemang.

Antalet logiskt inekvivalenta formler

Definition Wff:er φ, φ' är (logiskt) inekvivalenta om $\varphi \not\equiv \varphi'$, dvs om $\mathrm{Mod}(\varphi) \neq \mathrm{Mod}(\varphi')$.

Observation: Om en logik **L** har $n \in \mathbb{N}$ atomer så finns det "bara" 2^{2^n} parvis inekvivalenta formler. (Det finns 2^n tolkningar och för varje av dem kan formelns värde vara 0 eller 1, vilket ger 2^{2^n} möjligheter.)

Slutsats: Eftersom antalet formler i $\mathrm{WF}(\mathbf{L})$ är oändligt (utom i triviala logiker) vore det ur en algoritmisk synvinkel en stor fördel att kunna begränsa antalet formler till en ändlig mängd. Åtminstone borde det kunna begränsas till 2^{2^n}.

Exempel: Klasser av logiskt inekvivalenta formler

Antag att vi endast använder två atomer, A och B, då får vi 16 klasser av logiskt inekvivalent formler.

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Representanter för de sex första klasserna är

1. $\perp$, $A \wedge \perp$ och $B \wedge \perp$
2. $A \wedge B$ och $\neg(\neg A \vee \neg B)$
3. $A \wedge \neg B$ och $\neg(\neg A \to B)$
4. A, $A \vee A$ och $A \wedge \top$
5. $\neg A \wedge B$ och $\neg(A \to \neg B)$
6. B och $\top \to B$

Att begränsa antalet formler

- Resolution bygger på att endast betrakta klausuler $l_1 \vee \cdots \vee l_m$ (utan dubbla litteraler och fortfarande i en satslogik med $n \in \mathbb{N}$ atomer).
- Antalet klausuler är 4^n eftersom det finns fyra möjligheter för varje atom A: Varken A eller $\neg A$, endast A, endast $\neg A$, eller båda förekommer i klausulen. (Mängden innehåller specialfallet $\perp$, formeln som alltid är falsk och som per konvention likställs med den tomma klausulen.)
- En annan intressant tanke (som vi för närvarande inte utnyttjar): Klausuler som innehåller komplementära litteraler är alltid sanna, alltså ekvivalenta med $\top$ och således ointressanta ur en praktisk synvinkel. Stryks de och därmed fjärde fallet ovan så finns bara 3^n klausuler kvar.

  Man kan tycka att det är bättre att ha kvar $\top$ (eller snarare någon klausul som är ekvivalent med $\top$). I så fall fås $3^n + 1$ klausuler istället.

Uppgift 1

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Hitta formler på CNF utan dubbla litteraler i klausulerna som representerar klasserna 2, 13 och 14.

Lösning 1

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Resolutionsregeln

Definition Resolutionsregeln är bevisregeln

$$\boxed{\frac{\alpha \vee p,\ \alpha' \vee \neg p}{\alpha \vee \alpha'}}$$

där α, α' står för godtyckliga klausuler och p för en godtycklig atom.

- Resolutionsregeln appliceras alltså på klausuler $\varphi = l_1 \vee \cdots \vee l_m \vee l$ och $\varphi' = l'_1 \vee \cdots \vee l'_n \vee l'$ där l och l' är komplementära. Resultatet $l_1 \vee \cdots \vee l_m \vee l'_1 \vee \cdots \vee l'_n$ är igen en klausul, en resolvent av $\{\varphi, \varphi'\}$.
- Implicit stryks dubbla litteraler från resolventen, dvs vi tar alltid bort de l'_i som redan förekommer bland $l_1, \ldots, l_m$.
- Mängden av alla resolventer av $\{\varphi, \varphi'\}$ skrivs $Res(\varphi, \varphi')$.

Uppgift 2

Evaluera resolventerna nedan

- $Res(A \vee \neg B, \neg A \vee B)$
- $Res(A \vee \neg B, \neg A)$
- $Res(A, \neg A)$
- $Res(A \vee \neg B, A \vee \neg C)$
- $Res(A \vee \neg B \vee C, B \vee \neg C \vee D)$

Lösning 2

- $Res(A \vee \neg B, \neg A \vee B) = \{\neg B \vee B, A \vee \neg A\}$
- $Res(A \vee \neg B, \neg A) = \{\neg B\} = Res(A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B)$
- $Res(A, \neg A) = \{\bot\}$
- $Res(A \vee \neg B, A \vee \neg C) = \emptyset$ (ej samma sak som $\{\bot\}$!!!)
- $Res(A \vee \neg B \vee C, B \vee \neg C \vee D) = \{A \vee C \vee \neg C \vee D, A \vee \neg B \vee B \vee D\}$.

Resolutionsbevis

I bevissystemet **Res** betraktas endast formler som är klausuler. Det finns inga axiomscheman och den enda bevisregeln är resolutionsregeln. Explicit nedskriven lyder definitionen så här:

Definition **Res** $= (\emptyset, \{r\})$ där r är resolutionsregeln. Ett bevis för en klausul φ utifrån en mängd klausuler Φ (hypoteserna) är en sekvens $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ av klausuler sådana att

- varje φ_i är
  - ett element i Φ eller
  - ett element i $Res(\varphi_j, \varphi_k)$ där $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$

  och
- $\varphi_n = \varphi$.

Notationen $\Phi \vdash_{\textbf{Res}} \varphi$ uttrycker att det finns ett bevis för φ utifrån Φ i **Res**.