Satslogik – grundläggande definitioner

- Satslogikens syntax (välformade formler)
- Satslogikens semantik (tolkningar)
- Modeller, logisk konsekvens och ekvivalens
- Några notationella förenklingar
- Kompletta mängder av konnektiv

Satslogik

Definition En satslogik är ett system $\mathbf{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{A})$ där

- $\mathbf{P}$ är en mängd av symboler som kallas atomer (*proposition names*),
- $\mathbf{C} \subseteq \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}$ är mängden av konnektiv (*connectives*),
- $\mathbf{A} = \{(,)\}$ är mängden av hjälpsymboler (*auxiliary symbols*) och
- $\mathbf{P} \cap (\mathbf{C} \cup \mathbf{A}) = \emptyset$.

Anmärkningar

- Normalt används versaler $A, B, C, A', A_{42}, B_0, \ldots$ som atomer.
- Blockvärldsexemplet är en satslogik om de atomära satserna On_table(K_1) osv betraktas som en symbol var (snarare än som sammansatta uttryck). Logiken sägs då vara en ändlig satslogik eftersom antalet atomer är ändligt.

Uppgift 1

Vilka av följande kan sägas vara satslogiska system enligt definitionen på föregående sida?

- $L_1 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}, \{[,]\})$
- $L_2 = (\{\wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge, \vee\}, \{(,)\})$
- $L_3 = (\{☺, ☹\}, \{\bot, \top\}, \{(,)\})$
- $L_4 = (\{\wedge, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{(,)\})$
- $L_5 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}, \{(,)\}, \emptyset)$
- $L_6 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \vee\}, \{(,)\})$

Lösning

Enligt definitionen är L_3, L_4 och L_6 satslogiska system. Men

- L_1 använder sig av hakparanteser som hjälpsymboler, trots att definition kräver vanliga parenteser. För att undvika missförstånd bör man följa definitionen, även om den ibland kan tyckas onödigt begränsande. Vidare,
- $L_2 = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{A})$ har $\mathbf{P} \cap (\mathbf{C} \cup \mathbf{A}) \neq \emptyset$ och
- $L_5 = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \emptyset)$ har en extra komponent.

Dessa system strider alltså mot definition.

Välformade formler – en induktiv definition

Definition Låt $\mathbf{L} = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{A})$ vara en satslogik. Mängden av alla välformade formler över $\mathbf{L}$ är den minsta mängden $\mathrm{WF}(\mathbf{L}) \subseteq (\mathbf{P} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{A})^*$ sådan att

- $\mathbf{P} \subseteq \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ (varje atom är en välformad formel),
- $\bot \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ och $\top \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$, förutsatt att $\bot$ respektive $\top$ finns i $\mathbf{C}$,
- $(\neg\varphi) \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ för varje $\varphi \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$, förutsatt att $\neg$ finns i $\mathbf{C}$ och
- $(\varphi \otimes \varphi') \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ för alla $\varphi, \varphi' \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ och varje $\otimes \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$ som finns i $\mathbf{C}$.

Anmärkningar

- Om inget annat är sagt antas att $\mathbf{C} = \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}$.
- Om $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$ så är $((\neg A) \vee (B \wedge \bot))$ och $(A \rightarrow (\neg(A \vee C)))$ välformade men varken $\neg A \vee (B \wedge \bot)$ eller $\neg\neg A$ – och absolut inte $\vee A \neg \bot B \rightarrow$.
- De strikta reglerna för att sätta parenteser ska snart mjukas upp...

Uppgift 2

Vilka av följande formler är välformade enligt definitionen på föregående sida?

$\varphi_1 = \bot$	$\varphi_5 = ()$
$\varphi_2 = \neg A$	$\varphi_6 = (\neg A)$
$\varphi_3 = (\neg(A \wedge B))$	$\varphi_7 = (\rightarrow (A \wedge B))$
$\varphi_4 = (A \vee B \vee C)$	$\varphi_8 = ((A \vee B) \vee C)$

Lösning

Enligt definitionen är φ_1, φ_3, φ_6 och φ_8 välformade formler, men

- φ_2 saknar parenteser, och det gör även
- φ_4 (antingen runt $A \vee B$ eller runt $A \vee C$). Dessutom,
- φ_5 består bara av parenteser, och
- φ_6 ignorerar att ranken av $\rightarrow$ är två.

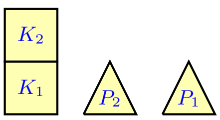
Semantik 1 – sanningsvärden och tolkningar

- Sanningsvärdena (*truth values*) är 0 och 1. De står för falskt och sant vilket gör att det i litteraturen ofta används F och T istället.
- En tolkning (*interpretation*, *valuation*) är en funktion

$$v\colon \mathbf{P} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Den tilldelar alltså varje atom ett sanningsvärde och definierar således en (ev inte tillåten) värld.

Observation: Även i en ändlig satslogik finns det rätt många tolkningar, nämligen 2^n stycken där n är antalet element i **P**.

I blockvärldsexemplet definieras 

så här:

Atom A	$v(A)$
Is_cube(K_1)	1
Is_cube(K_2)	1
Is_cube(P_1)	0
Is_cube(P_2)	0
Is_pyramid(K_1)	0
Is_pyramid(K_2)	0
Is_pyramid(P_1)	1

Atom A	$v(A)$
Is_pyramid(P_2)	1
On_table(K_1)	1
On_table(K_2)	0
On_table(P_1)	1
On_table(P_2)	1
On(K_1, K_1)	0
On(K_1, K_2)	0

Atom A	$v(A)$
On(K_1, P_1)	0
On(K_1, P_2)	0
On(K_2, K_1)	1
On(K_2, K_2)	0
On(K_2, P_1)	0
On(K_2, P_2)	0
On(P_1, K_1)	0

Atom A	$v(A)$
On(P_1, K_2)	0
On(P_1, P_1)	0
On(P_1, P_2)	0
On(P_2, K_1)	0
On(P_2, K_2)	0
On(P_2, P_1)	0
On(P_2, P_2)	0

Antalet möjliga tolkningar är 2^{28} fastän bara 13 representerar ”realiteten“. Stryks de atomer som har samma värde i alla tillåtna världar så reduceras antalet atomer till 10, motsvarande 1024 tolkningar, vilket är mycket bättre!

Semantik 2 – informell definition av formlers semantik

Semantiken för konnektiv (och därmed för formler) kan beskrivas med sanningstabeller. För $\neg$ och $\rightarrow$ ser det så här ut (där $\varphi, \varphi' \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$):

$v(\varphi)$	$v((\neg\varphi))$
0	1
1	0

$v(\varphi)$	$v(\varphi')$	$v((\varphi \rightarrow \varphi'))$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Det brukar vara svårt att inse att $(\varphi \rightarrow \varphi')$ är sann om φ är falsk, oberoende av φ's värde. Det blir dock enkelt om man kommer ihåg att det som är sant är påståendet som en helhet. Med andra ord, formeln hävdar endast att φ' är sann under förutsättningen att φ är sann. Om förutsättningen inte är given säger formeln alltså inte fel.

Semantik 3 – formell definition av formlers semantik

Definition En tolkning $v\colon \mathbf{P} \rightarrow \{0,1\}$ utvidgas induktivt till en funktion $\overline{v}\colon \mathrm{WF}(\mathbf{L}) \rightarrow \{0,1\}$: För $\varphi \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$

$$\overline{v}(\varphi) = \begin{cases} \min(\overline{v}(\varphi_1), \overline{v}(\varphi_2)) & \text{om } \varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \\ \max(\overline{v}(\varphi_1), \overline{v}(\varphi_2)) & \text{om } \varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \\ \max(1 - \overline{v}(\varphi_1), \overline{v}(\varphi_2)) & \text{om } \varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \\ 1 - (\overline{v}(\varphi_1) - \overline{v}(\varphi_2))^2 & \text{om } \varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \\ 1 - \overline{v}(\varphi_1) & \text{om } \varphi = (\neg\varphi_1) \\ 0 & \text{om } \varphi = \bot \\ 1 & \text{om } \varphi = \top \\ v(\varphi) & \text{om } \varphi \in \mathbf{P}. \end{cases}$$

Ett alternativt sätt att säga samma sak:

Definition En tolkning $v\colon \mathbf{P} \rightarrow \{0,1\}$ utvidgas induktivt till en funktion $\overline{v}\colon \mathrm{WF}(\mathbf{L}) \rightarrow \{0,1\}$ så här:

$$\begin{array}{lll} \overline{v}((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = 1 & \text{om och endast om} & \overline{v}(\varphi_1) = 1 \text{ och } \overline{v}(\varphi_2) = 1, \\ \overline{v}((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = 1 & \text{om och endast om} & \overline{v}(\varphi_1) = 1 \text{ eller } \overline{v}(\varphi_2) = 1, \\ \overline{v}((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)) = 1 & \text{om och endast om} & \overline{v}(\varphi_1) = 0 \text{ eller } \overline{v}(\varphi_2) = 1, \\ \overline{v}((\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)) = 1 & \text{om och endast om} & \overline{v}(\varphi_1) = \overline{v}(\varphi_2), \\ \overline{v}((\neg\varphi)) = 1 & \text{om och endast om} & \overline{v}(\varphi) = 0, \\ \overline{v}(\bot) = 0, & & \\ \overline{v}(\top) = 1 & \text{och} & \\ \overline{v}(A) = v(A) & \text{för alla } A \in \mathbf{P}. & \end{array}$$

Uppgift 3

Låt $v(A) = 0$ och $v(B) = 1$, vad är då $\overline{v}(((\neg A) \rightarrow (A \vee B)))$?

Lösning

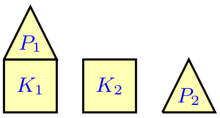
$$\begin{aligned}
\overline{v}(((\neg A) \rightarrow (A \vee B))) &= \max(1 - \overline{v}((\neg A)), \overline{v}((A \vee B))) \\
&= \max(1 - (1 - \overline{v}(A)), \max(\overline{v}(A), \overline{v}(B))) \\
&= \max(1 - (1 - v(A)), \max(v(A), v(B))) \\
&= \max(1 - (1 - 0), \max(0, 1)) \\
&= \max(1 - 1, 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Modell och logisk följd

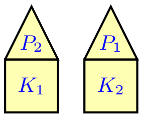
Nedan, låt $\Phi \subseteq \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ vara en mängd av formler och $\varphi \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ en formel.

- En modell av Φ är en tolkning v sådan att $\overline{v}(\varphi) = 1$ för alla $\varphi \in \Phi$.
  Intuitivt: En modell är en situation där alla formler i Φ är sanna.
- Mängden av alla modeller av Φ skrivs $\mathrm{Mod}(\Phi)$. Istället för $\mathrm{Mod}(\{\varphi\})$ kan kort skrivas $\mathrm{Mod}(\varphi)$.
- Vi säger att φ är en logisk följd (också kallad semantisk följd) av Φ och skriver $\Phi \models \varphi$ om $\mathrm{Mod}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$.
  Intuitivt: Om formlerna i Φ är sanna i en situation så är φ också sann i samma situation.
- Istället för $\emptyset \models \varphi$ kan kort skrivas $\models \varphi$. (Observera att $\mathrm{Mod}(\emptyset)$ är mängden av alla tolkningar!)
- Formeln φ är satisfierbar om $\mathrm{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$. Den är en tautologi om varje tolkning är en modell av φ (alltså om $\models \varphi$).

Exempel: Låt v, v' vara tolkningarna som motsvarar



respektive



.

Både v och v' är modeller av

$$\Phi = \{(\mathsf{On}(P_1, K_2) \to \mathsf{On}(P_2, K_1)),\ (\mathsf{On}(P_1, K_1) \vee \mathsf{On}(P_1, K_2))\},$$

dvs $v, v' \in \mathrm{Mod}(\Phi)$. Båda formler är således satisfierbara. Ingen av dem är dock en tautologi eftersom det finns tolkningar som gör att de blir falska. Dessutom gäller t ex $\Phi \models (\mathsf{On}(P_1, K_1) \vee \mathsf{On}(P_2, K_1))$.

Frågor:

- Är $(\mathsf{On\_table}(P_1) \to (\neg \mathsf{On}(P_1, K_1)))$ en tautologi (alltså alltid sann)?
- Är $\mathsf{Is\_pyramid}(K_1)$ satisfierbar (alltså ibland sann)?
- Gäller $\{\mathsf{On\_table}(K_2)\} \models (\neg \mathsf{On}(K_2, K_1))$?

Logisk ekvivalens: Formler $\varphi, \varphi' \in \mathrm{WF}(\mathbf{L})$ är logiskt ekvivalenta och vi skriver $\varphi \equiv \varphi'$ om $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\varphi')$. Några viktiga ekvivalenser:

$(\varphi \wedge \bot) \equiv \bot$	$\bot$ är nollan för $\wedge$
$(\varphi \vee \bot) \equiv \varphi$	$\bot$ är ettan för $\vee$
$(\varphi \wedge (\neg\varphi)) \equiv \bot$	$\wedge$-komplementregel
$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$	idempotens
$((\varphi \wedge \varphi') \wedge \varphi'') \equiv (\varphi \wedge (\varphi' \wedge \varphi''))$	associativitet av $\wedge$
$(\varphi \wedge \varphi') \equiv (\varphi' \wedge \varphi)$	kommutativitet av $\wedge$
$(\varphi \wedge (\varphi' \vee \varphi'')) \equiv ((\varphi \wedge \varphi') \vee (\varphi \wedge \varphi''))$	$\wedge$ distribuerar över $\vee$
$(\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi')) \equiv \varphi$	absorbtionsregel
$(\neg(\varphi \wedge \varphi')) \equiv ((\neg\varphi) \vee (\neg\varphi'))$	de Morgans regel

För varje ekvivalens fås en dual ekvivalens genom att byta ut varje konnektiv mot dess duala: $\wedge \leftrightarrow \vee$, $\bot \leftrightarrow \top$, $\leftrightarrow\ \leftrightarrow\ \leftrightarrow$, $\neg \leftrightarrow \neg$. På så sätt fås t ex de Morgans andra regel: $(\neg(\varphi \vee \varphi')) \equiv ((\neg\varphi) \wedge (\neg\varphi'))$.

Förenklad notation

- Pga associativitet kan $((\varphi \wedge \varphi') \wedge \varphi'')$ och $(\varphi \wedge (\varphi' \wedge \varphi''))$ uppfattas som samma formel och skrivas $(\varphi \wedge \varphi' \wedge \varphi'')$. Samma sak gäller $\vee$.
- Pga kommutativitet kan $(\varphi \wedge \varphi')$ och $(\varphi' \wedge \varphi)$ uppfattas som samma formel. Samma sak gäller $\vee$.
- Parenteser runt negerade atomer samt yttre parenteser kan utelämnas.
- I litteraturen används dessutom ofta bindningsregler: $\neg$ före $\wedge$ före $\vee$ före $\to$ och $\leftrightarrow$. För att undvika missförstånd använder vi inte de här reglerna!

Kompletta mängder av konnektiv

Alla tänkbara logiska konnektiv kan översättas till ekvivalenta formler som endast inne- håller konnektiven $\rightarrow$ och $\neg$ (och ev $\perp$). Konnektivmängden $\{\rightarrow, \neg\}$ kallas därför komplett.

Ytterligare kompletta mängder av konnektiv är t ex $\{\wedge, \neg\}$ och $\{\vee, \neg\}$. Det finns dock två konnektiv som bildar kompletta mängder för sig själva:

NAND (not and)

$\overline{v}(\varphi)$	$\overline{v}(\varphi')$	$\overline{v}(\varphi \mid \varphi')$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR (not or)

$\overline{v}(\varphi)$	$\overline{v}(\varphi')$	$\overline{v}(\varphi \downarrow \varphi')$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Med andra ord, om vi istället för $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ endast har $\mid$ eller $\downarrow$ kan vi fortfarande uttrycka lika mycket.