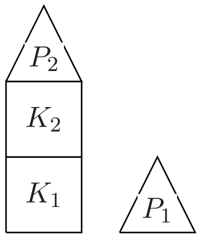
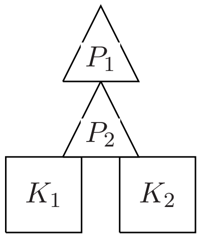
F. Drewes, J. Högberg 2006-09-18

Logik för datavetare, HT05
– Latex-mall –

Blockvärldar



är okej men inte



Ett bevis i Hilbertsystemet

Vi vill visa att $\{A, A \to B, B \to C\} \models \neg D \to C$.

1.	A	(hypotes)
2.	$A \to B$	(hypotes)
3.	B	(modus ponens på 1 och 2)
4.	$B \to C$	(hypotes)
5.	C	(modus ponens på 3 och 4)
6.	$C \to (\neg D \to C)$	($Ax_1 = \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_1)$ med $\alpha_1 = C$ och $\alpha_2 = \neg D$)
7.	$\neg D \to C$	(modus ponens på 5 och 6)

Resolution i satslogiken

Resolutionsregeln är bevisregeln

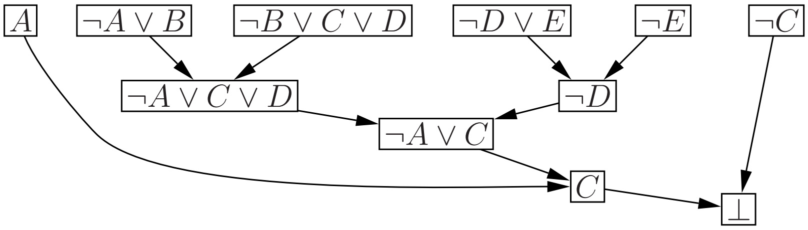
$$\boxed{\frac{\alpha \vee p,\ \alpha' \vee \neg p}{\alpha \vee \alpha'}}$$

där α, α' står för godtyckliga klausuler och p för en godtycklig atom.

- Resolutionsregeln appliceras alltså på klausuler $\varphi = l_1 \vee \cdots \vee l_m \vee l$ och $\varphi' = l'_1 \vee \cdots \vee l'_n \vee l'$ där l och l' är komplementära. Resultatet $l_1 \vee \cdots \vee l_m \vee l'_1 \vee \cdots \vee l'_n$ är igen en klausul, en resolvent av $\{\varphi, \varphi'\}$.

- Implicit stryks dubbla litteraler från resolventen, dvs vi tar alltid bort de l'_i som redan förekommer bland $l_1, \ldots, l_m$.

- Mängden av alla resolventer av $\{\varphi, \varphi'\}$ skrivs $Res(\varphi, \varphi')$.



varken enhetsvederläggning
eller inputvederläggning

Hornklausuler och minsta modellen

För en formelmängd Φ låt

$$\mathsf{atCons}(\Phi) = \{A \in \mathbf{P} \mid \Phi \models A\} = \{A \in \mathbf{P} \mid v(A) = 1 \text{ för alla } v \in \mathrm{Mod}(\Phi)\}$$

vara mängden av Φs *atomära konsekvenser*. Tolkningen $v_\bot^\Phi$ definieras

$$v_\bot^\Phi(A) = \begin{cases} 1 & \text{om } A \in \mathsf{atCons}(\Phi) \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Observation: Om $v_\bot^\Phi$ är en modell av Φ så är den dess *minsta modell* i den bemärkelsen att alla övriga modeller v uppfyller $v(A) \geq v_\bot^\Phi(A)$ för alla $A \in \mathbf{P}$ (och om $v_\bot^\Phi$ inte är en modell av Φ så har Φ ingen minsta modell).

Första ordningens predikatlogik

En *första ordningens predikatlogik* är en quadrupel $\mathbf{L} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{T})$ där

- $\mathbf{R}$ är en mängd av *relationssymboler* där varje $R \in \mathbf{R}$ har en *ställighet* $\mathsf{arity}(R) \geq 0$,
- $\mathbf{C} \subseteq \{\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}$ är mängden av *konnektiv* (alltså som i satslogiken fast med ytterligare konnektiv $\forall, \exists$),
- mängden $\mathbf{A}$ som består av (,) och , är mängden av *hjälpsymboler* och
- $\mathbf{T}$ är en signatur.

Det krävs att alla symbolmängder är disjunkta. Om inget annat sägs antas att $\mathbf{C} = \{\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}$.

Tolkningar

Låt $\mathbf{L} = (\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{T})$ vara en predikatlogik där $\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \mathbf{K}, \mathbf{F})$. En tolkning J av $\mathbf{L}$ består av följande komponenter:

- En icke tom men i övrigt godtycklig mängd $\mathsf{dom}(J)$, tolkningens *domän*.
- En n-ställig *relation* $R^J \subseteq \mathsf{dom}(J)^n$ för varje relationssymbol $R^{(n)} \in \mathbf{R}$.

  Relationen R^J betraktas som ett *predikat* $R^J\colon \mathsf{dom}(J)^n \to \{0, 1\}$ som tar objekt $d_1, \ldots, d_n \in \mathsf{dom}(J)$ som argument och returnerar sanningsvärdet 1 om $(d_1, \ldots, d_n) \in R^J$ och 0 annars.
- Ett objekt $K^J \in \mathsf{dom}(J)$ för varje konstant $K \in \mathbf{K}$.
- En n-ställig funktion $f^J\colon \mathsf{dom}(J)^n \to \mathsf{dom}(J)$ för varje funktionssymbol $f^{(n)} \in \mathbf{F}$.

Meningar

Variablerna inom räckvidden för en kvantifierare är alltså de som kvantifieraren syftar på. (Konceptet liknar räckvidden för en variabel i ett programspråk med lexikalisk räckvidd.)

$$(\exists \underline{x})\underbrace{((R(\underline{x}) \wedge (\forall \underline{x})(\underbrace{Q(\underline{x}, y)})) \vee (\forall \underline{y})(\underbrace{Q(f(\underline{x}), \underline{y})}))} \to R(x)$$

Skolemisering

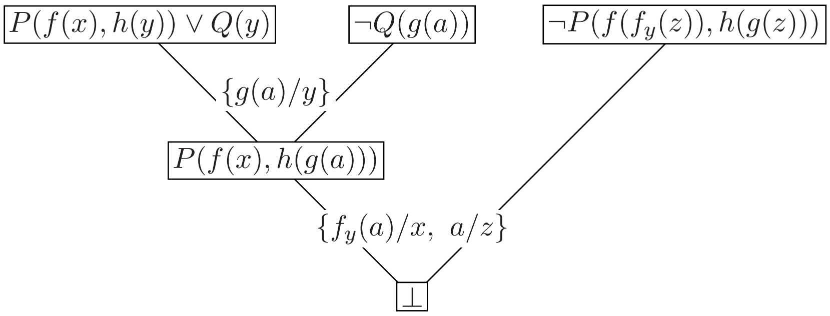
Betrakta t ex $\varphi = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall z')(\varphi')$ och en tolkning J där $\varphi^J = 1$.

- Man ska alltså för alla $d_x, d_y \in \mathsf{dom}(J)$ kunna välja något $d_z \in \mathsf{dom}(J)$ som gör att $(\forall z')(\varphi')$:s värde blir 1 under J-värderingarna som tilldelar x, y, z värdena d_x, d_y, d_z.
- Värdet d_z beror på d_x och d_y (men *inte* på $d_{z'}$). Man kan alltså se det som en funktion choose_z som väljer rätt värde beroende på d_x, d_y, dvs $d_z = \mathsf{choose}_z(d_x, d_y)$.
- Vi kan därför utöka logiken med en ny (!) funktionssymbol $f_z^{(2)}$ och ersätta formeln med $\psi = (\forall x)(\forall y)(\forall z')(\varphi'')$ där φ'' fås genom att ersätta alla förekomster av z i φ' med $f_z(x, y)$.
- Om J utökas på så sätt att f_z tolkas som choose_z så gäller $\psi^J = 1$.

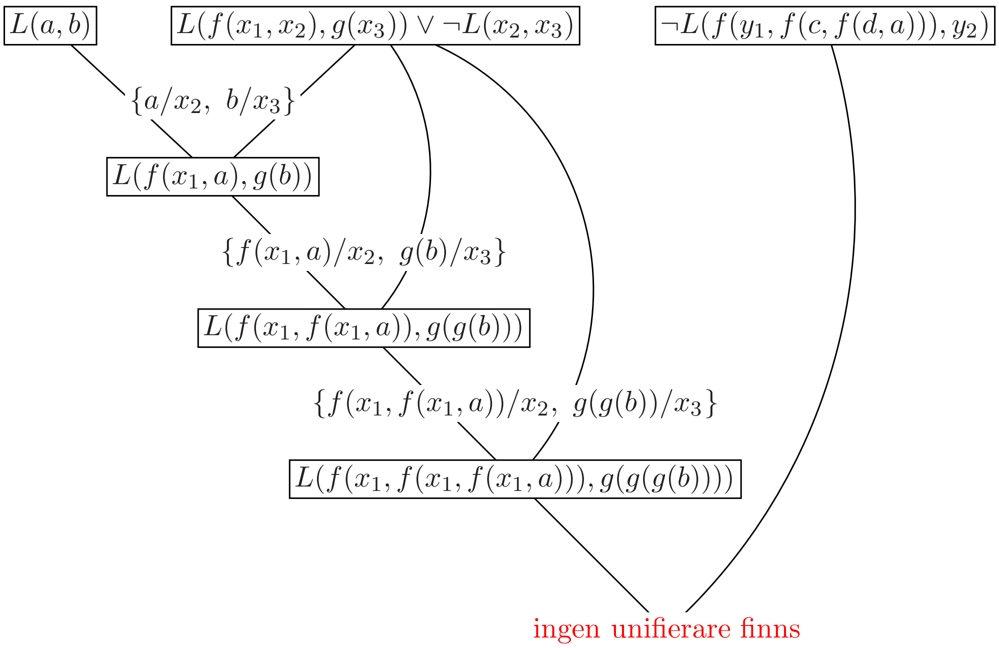
Resolution kräver substitution

$$\boxed{\begin{array}{r}\{(\forall x)(\forall y)(P(f(x),h(y)) \vee Q(y)),\ (\forall x)(\neg Q(g(a)))\} \\ \models (\exists x)(\forall y)(P(f(y),h(g(x))))\end{array}}$$

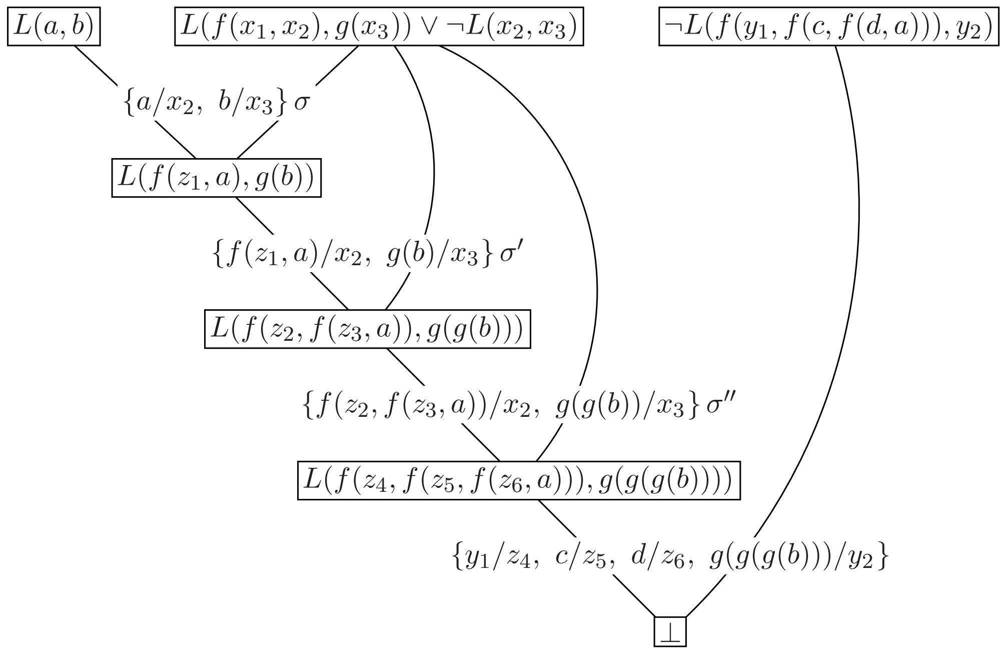
Normalisering ger klausulerna
1. $P(f(x),h(y)) \vee Q(y)$,
2. $\neg Q(g(a))$,
3. $\neg P(f(f_y(z)),h(g(z)))$.



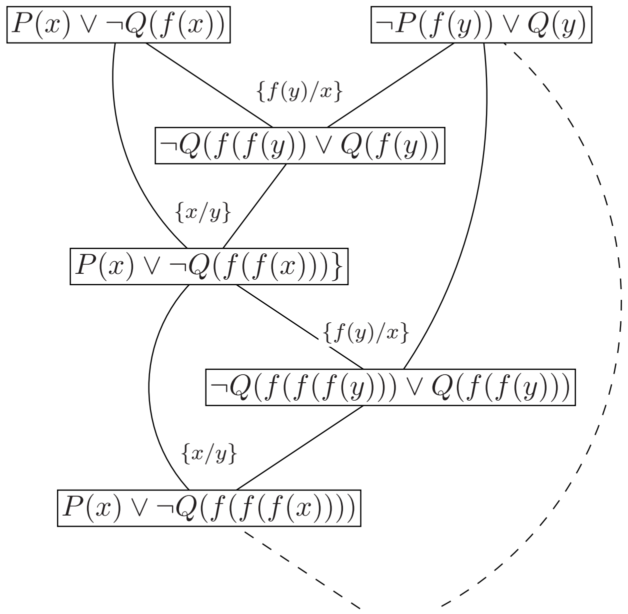
Resolutionsbevis 1



Resolutionsbevis 2



. . . men varför kan $\Phi \vdash_{\mathbf{Res}}$ inte avgöras som i satslogiken?



Eftersom resolution innebär unifiering kan den generera nya atomära formler. Därför är sökrummet oändligt.