**Övningsuppgifter i Logik**

**– J. Högberg, 3 oktober 2006 –**

# 1 Satslogik

### Uppgift 1

Vilka av följande kan sägas vara satslogiska system enligt definitionen i oh-serien *Satslogik – grundläggande definitioner*, sida 2, på kursen *Logik för datavetare, TDBB42*?

$L_1 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \perp, \top\}, \{[, ]\})$
$L_2 = (\{\wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge, \vee\}, \{(, )\})$
$L_3 = (\{☺, ☹\}, \{\perp, \top\}, \{(, )\})$
$L_4 = (\{\wedge, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{(, )\})$
$L_5 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \perp, \top\}, \{(, )\}, \emptyset)$
$L_6 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \vee\}, \{(, )\})$

### Uppgift 2

Vilka av följande formler är välformade?

$\varphi_1 = \perp$
$\varphi_2 = \neg A$
$\varphi_3 = (\neg(A \wedge B))$
$\varphi_4 = (A \vee B \vee C)$
$\varphi_5 = ()$
$\varphi_6 = (\neg A)$
$\varphi_7 = (\rightarrow (A \wedge B))$
$\varphi_8 = ((A \vee B) \vee C)$

### Uppgift 3

Vilka av följande ekvivalenser är korrekta?

(a) $(\perp \vee \top) \equiv \top$
(b) $(\perp \wedge \top) \equiv \top$
(c) $(A \rightarrow B) \equiv (A \vee \neg B)$
(d) $(A \wedge (A \vee B)) \equiv (A)$
(e) $(A \vee (A \wedge B)) \equiv (B)$
(f) $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
(g) $(A \vee (B \wedge C \wedge D)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D))$
(h) $(A \leftrightarrow B) \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

### Uppgift 4

Vilka av följande formler är på konjunktiv normalform?

$\varphi_1 = A \wedge B$
$\varphi_2 = (A \vee C) \wedge B$
$\varphi_3 = (A \wedge C) \vee B$
$\varphi_4 = A \vee B$
$\varphi_5 = A$
$\varphi_6 = A \vee C \wedge B$
$\varphi_7 = A \wedge B \wedge C$
$\varphi_8 = (\neg A \vee A) \wedge (A \vee A)$

**Uppgift 5**

Vilka av följande formler är på disjunktiv normalform?

| | |
|---|---|
| $\varphi_1 = A \wedge B$ | $\varphi_5 = \neg A$ |
| $\varphi_2 = (A \vee C) \wedge B$ | $\varphi_6 = (A \wedge B) \vee C$ |
| $\varphi_3 = A \wedge C \wedge B$ | $\varphi_7 = A \vee C$ |
| $\varphi_4 = A \wedge B \vee C$ | $\varphi_8 = (\neg A \wedge A) \vee (A \wedge A)$ |

**Uppgift 6**

Om ett axiomschema innehåller mallen $(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_1))$, vilka av följande formler är då axiom?

| | |
|---|---|
| $\varphi_1 = (A \to (B \to A))$ | $\varphi_3 = (A \to (A \to A))$ |
| $\varphi_2 = ((A \to A) \to (A \to (A \to A)))$ | $\varphi_4 = (A \to (B \to (C \vee D)))$ |

**Uppgift 7**

Vilka av följande resonemang är acceptabla tillämpningar av modus ponens?

$$\frac{\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2}{\alpha_2}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $A$ | (hypotes) | 1. $A$ | (hypotes) |
| 2. $A \to B$ | (hypotes) | 2. $B \to C$ | (hypotes) |
| 3. $B$ | (MP) | 3. $C$ | (MP) |

**Uppgift 8**

Om $\mathbf{S}$ är ett satslogiskt system och det gäller att $\vdash_{\mathbf{S}} A$, där $A$ är en atom, är det då rimligt att tro att $\mathbf{S}$ är sunt?

**Uppgift 9**

(a) Ett *tertiärt* konnektiv tar tre argument, till skillnad från t ex binära konnektiv, vilka tar två. Hur många inekvivalenta tertiära konnektiv kan man definiera?

(b) Vad innebär det att en mängd konnektiv är komplett?

**Uppgift 10**

Låt $\Gamma = (\mathbf{S}, \mathbf{R})$, där $\mathbf{S} = \{\alpha_1\}$ och $\mathbf{R} = \{\textsf{Modus Ponens}\}$, vara ett satslogiskt bevissystem. Axiomschemat $\alpha_1$ består som synes av en enda platshållare. Denna platshållare ersätts med en godtycklig formel varje gång schemat används i ett bevis.

(a) Är $\Gamma$ sunt? Varför/varför inte?

(b) Är $\Gamma$ fullständigt? Varför/varför inte?

(c) Finns det någon passande tillämpning för $\Gamma$?

**Uppgift 11**

(a) Finns det en satslogisk formel $\varphi$ sådan att $\textsf{length}(\varphi) > 1$ och som samtidigt är på både CNF och DNF? Varför/varför inte?

(b) Konvertera

$$(A \to B) \vee ((B \to A) \wedge ((C \to B) \to A))$$

till CNF och förenkla så långt som möjligt. Visa inte bara lösningen utan även lösningsvägen.

**Uppgift 12**

Evaluera resolventerna nedan

(a) $Res(A \vee \neg B, \neg A \vee B)$

(b) $Res(A \vee \neg B, \neg A)$

(c) $Res(A, \neg A)$

(d) $Res(A \vee \neg B, A \vee \neg C)$

(e) $Res(A \vee \neg B \vee C, B \vee \neg C \vee D)$

**Uppgift 13**

Ett bevissystem **S** är som bekant fullständigt om $\models \varphi$ implicerar $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$. Nu är frågan, finns det bevis inom Resolutionsystemet på formen $\vdash_{\mathbf{Res}} \varphi$ ?

**Uppgift 14**

Existerar en enhetsvederläggning så att

$$\{A \vee B, \neg A \vee B, A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B\} \vdash_{\mathbf{Res}} \bot \ ?$$

**Uppgift 15**

Vilka av nedstående klausuler är hornklausuler?

| | |
|---|---|
| $\varphi_1 = (\bot)$ | $\varphi_5 = (A \vee \neg B \vee \neg C)$ |
| $\varphi_2 = (A \vee B)$ | $\varphi_6 = (A)$ |
| $\varphi_3 = (\neg A \vee B)$ | $\varphi_7 = (\neg B)$ |
| $\varphi_4 = (\neg A \wedge B)$ | $\varphi_8 = (\neg A \wedge \neg B)$ |

# 2 Predikatlogik

**Uppgift 16**

Vilka av följande tripplar är signaturer?

(a) $(\emptyset,\ \{c_1, c_2, c_3\},\ \{f_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\})$

(c) $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\},\ \{c_j \mid j \in \mathbb{R}\},\ \{f_k^{(2)} \mid k \in \mathbb{R}\})$

(b) $(\{x_i \mid i \in \mathbb{R}\},\ \{2, 3, 5, 7, 11\},\ \{+^{(2)}, -^{(1)}, -^{(2)}, *^{(2)}, /^{(2)}\})$

**Uppgift 17**

Om $\mathbf{T} = (\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\pi, 1\}, \{+^{(2)}, -^{(1)}, -^{(2)}\})$ är en signatur, vilka av följande strängar tillhör då $\mathsf{terms}(\mathbf{T})$?

(a) $x_2$ (c) $x_2 + \pi$ (e) $+(-(\pi, x_0), 1)$

(b) $\pi$ (d) $+(x_2, \pi)$ (f) $-(+(x_{100}, x_{200}))$

Och om $\mathbf{T} = (\emptyset, \{\textsc{Jag}, \textsc{Skype}\}, \{\textsc{Friends}^{(1)}, \cup^{(2)}, \cap^{(2)}\})$ ?

(a) $\textsc{Jag}$ (c) $x_2$

(b) $\textsc{Skype}$ (d) $\textsc{Friends}(\textsc{Jag})$

(e) $\cap(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Jag})), \textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Skype})))$

(f) $\cap(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Friends}(\textsc{Jag})))), \textsc{Skype})$

**Uppgift 18**

Vilka av följande quadrupler kan sägas vara predikatlogiker?

(a) $(\{R_1^{(0)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}, R_4^{(2)}\},$
$\{\neg, \vee, \exists, \forall\},$
$\{(, ), ,\},$
$(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{c_1\}, \{f_1^{(0)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}\}))$

(b) $(\{R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, R_3^{(0)}\},$
$\{\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \leftrightarrow, \perp, \top\},$
$\{(, ), ,\},$
$(\emptyset, \emptyset, \emptyset))$

(c) $(\{=^{(2)}, <^{(2)}, >^{(2)}\},$
$\{\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg\},$
$\{(, ), .\},$
$(\{x, y, z\}, \{\exists, \forall\}, \{\vee^{(2)}, \wedge^{(1)}, \wedge^{(2)}\}))$

**Uppgift 19**

Om

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = (&\{R_1^{(0)}, R_2^{(1)}, R_3^{(2)}\},\\ &\{\exists, \forall, \neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \leftrightarrow, \perp, \top\},\\ &\{(, ), ,\},\\ &(\{x, y, z\}, \{c_1, c_2\}, \{f_1^{(2)}, f_2^{(2)}\}))\end{aligned}$$

är en predikatlogik, vilka av följande strängar tillhör då WF($\mathbf{L}$)?

(a) $R_1$
(b) $f_1(x, y)$
(c) $R_3(z, z)$
(d) $(\exists x)(R_2(x))$
(e) $\exists x\ R_2(x)$
(f) $R_3(f_2(c_1, c_2))$
(g) $R_1 \wedge R_3(f_2(c_1, c_2), z)$
(h) $(\forall y)((\exists x)(\top \vee R_3(f_1(x, y), c_2)))$
(i) $f_2(c_1, y) \rightarrow R_1$
(j) $(\exists x)(R_2(y))$

**Uppgift 20**

Para ihop varje tuppel av en formel $\varphi$ och en substituering $\sigma$ med den resulterande formeln $\varphi\sigma$.

| | | |
|---|---|---|
| $R(x)$ | $\{f(y)/x\}$ | $R(x)$ |
| $R(f_y(x), y)$ | $\{a/x, b/y\}$ | $R(f(y)))$ |
| $R(x)$ | $\{y/x\}$ | $R(g(a), f(y), g(a))$ |
| $R(y)$ | $\{x/y\}$ | $R(f_y(a), b)$ |
| $R(x, f(y), x)$ | $\{g(a)/x, b/z\}$ | $R(f(y), f(x))$ |
| $R(f(x), f(y))$ | $\{y/x, x/y\}$ | $R(y)$ |

**Uppgift 21**

Hitta en lämplig unifierare till varje formelpar.

| | |
|---|---|
| $R(x)$ | $R(y)$ |
| $R(g(a))$ | $R(x)$ |
| $R(y)$ | $R(y)$ |
| $R(z, f(z))$ | $R(a, x)$ |
| $R(g(x))$ | $R(f(y))$ |
| $R(x)$ | $R(f(x))$ |

**Uppgift 22**

Låt

$$\varphi = (\forall x)(\forall y)(R_1(f_1(x, y), f_2(x, y)) \leftrightarrow R_1(c_1, f_3(x, y)))$$

vara en mening i en första ordningens predikatlogik som inte innehåller fler relationssymboler, funktionssymboler eller konstanter.

(a) Definiera en tolkning $J$ som är en modell av $\varphi$.

(b) Definiera en tolkning $J'$ som inte är en modell av $\varphi$.

**Uppgift 23**

(a) Visa meningen $\varphi'$ som är resultatet av att applicera skolemisering på meningen

$$\varphi = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x, c_0) \to P(f(x, z), y)) \ .$$

(b) En modell av $\varphi$ i (a) är tolkningen $J$ där

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{dom}(J) & = & \mathbb{Q}, \\ c_0 & = & 0, \\ P^J(u, v) & = & u = v, \text{ och} \\ f^J(u, v) & = & u \times v \ . \end{array}$$

Utvidga $J$ till en modell av $\varphi'$ genom att tilldela lämpliga funktioner till funktionssymboler som nu förekommer i $\varphi'$ men inte i $\varphi$. En liten påminnelse; $\mathbb{Q}$ är mängden av alla rationella tal (ett rationellt tal kan alltid skrivas på formen $\frac{m}{n}$ där $n \neq 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$).

**Uppgift 24**

(a) Vad är en *unifierare* av atomära formler $\varphi$ och $\varphi'$ och när sägs den vara *mest generell*?

(b) Visa med hjälp av följande exempel hur algoritmen för att konstruera den mest generella unifieraren fungerar (där $w, x, y, z$ är variablerna):

$$\begin{array}{rcl} P(g(y,z),x) & \text{och} & P(g(f(z),f(f(w))),f(y)) \\ P(g(x),f(y)) & \text{och} & P(g(g(y)),f(x)) \\ P(x,g(z,z)) & \text{och} & P(f(y),g(a,x)). \end{array}$$

**Uppgift 25**

Visa mha ett resolutionsbevis att klausulmängden

$$\begin{aligned}\Phi = \{\ & P(f(u), u), \\ & \neg P(v, a) \vee Q(v), \\ & \neg Q(f(w)) \vee \neg P(g(w, x), w), \\ & \neg P(x, z) \vee \neg Q(y) \vee P(g(z, b), a)\ \}\end{aligned}$$

(där $u, \ldots, z$ är variablerna) är motsägelsefull. Beviset ska ritas som en graf. Den ska, för varje resolutionssteg, inte bara visa den resulterande formeln utan också mgu:n som ligger till grund för resolutionssteget. Förutom $\perp$ ska grafen inte innehålla onyttiga formler, dvs formler som inte används i något senare steg.

**Uppgift 26**

Bevisa att Resolution för satslogik är sunt, dvs att $\Phi \vdash_{\mathbf{Res}} \varphi$ implicerar $\Phi \models \varphi$.