Övningsuppgifter i Logik

– J. Högberg, 3 oktober 2006 –

1 Satslogik

Uppgift 1

Vilka av följande kan sägas vara satslogiska system enligt definitionen i oh-serien *Satslogik – grundläggande definitioner*, sida 2, på kursen *Logik för datavetare, TDBB42*?

$L_1 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}, \{[,]\})$
$L_2 = (\{\wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge, \vee\}, \{(,)\})$
$L_3 = (\{☺, ☹\}, \{\bot, \top\}, \{(,)\})$
$L_4 = (\{\wedge, \vee\}, \{\neg, \to\}, \{(,)\})$
$L_5 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top\}, \{(,)\}, \emptyset)$
$L_6 = (\{A, B, C\}, \{\neg, \vee\}, \{(,)\})$

Svar Enligt definitionen är L_3, L_4 och L_6 satslogiska system. Men

- L_1 använder sig av hakparanteser som hjälpsymboler, trots att definition kräver vanliga parenteser. För att undvika missförstånd bör man följa definitionen, även om den ibland kan tyckas onödigt begränsande. Vidare,
- $L_2 = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{A})$ har $\mathbf{P} \cap (\mathbf{C} \cup \mathbf{A}) \neq \emptyset$ och
- $L_5 = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \emptyset)$ har en extra komponent.

Uppgift 2

Vilka av följande formler är välformade?

$\varphi_1 = \bot$
$\varphi_2 = \neg A$
$\varphi_3 = (\neg(A \wedge B))$
$\varphi_4 = (A \vee B \vee C)$
$\varphi_5 = ()$
$\varphi_6 = (\neg A)$
$\varphi_7 = (\to (A \wedge B))$
$\varphi_8 = ((A \vee B) \vee C)$

Svar Formlerna φ_1, φ_3, φ_6 och φ_8 är välformade, men

- φ_2 saknar parenteser, och det gör även
- φ_4 (antingen runt $A \vee B$ eller runt $A \vee C$). Dessutom,
- φ_5 består bara av parenteser, och
- φ_6 ignorerar att $\to$ har rank två.

Uppgift 3

Vilka av följande ekvivalenser är korrekta?

(a) $(\bot \vee \top) \equiv \top$
(b) $(\bot \wedge \top) \equiv \top$
(c) $(A \to B) \equiv (A \vee \neg B)$
(d) $(A \wedge (A \vee B)) \equiv (A)$
(e) $(A \vee (A \wedge B)) \equiv (B)$
(f) $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
(g) $(A \vee (B \wedge C \wedge D)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D))$
(h) $(A \leftrightarrow B) \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

Svar

(a) Korrekt enligt konnektivet $\vee$'s semantik.
(b) Ej korrekt, enligt konnektivet $\wedge$'s semantik.
(c) Ej korrekt, högersidan skall vara $(\neg A \vee B)$.
(d) Korrekt, enligt absorbtionsregeln.
(e) Ej korrekt, högersidan skall åter igen vara (A).
(f) Ej korrekt, men påminner om distributionsregeln.
(g) Korrekt, distrubutionsregeln applicerad på de tre klausulerna B, C och D.
(h) Korrekt.

Uppgift 4

Vilka av följande formler är på konjunktiv normalform?

$\varphi_1 = A \wedge B$	$\varphi_5 = A$
$\varphi_2 = (A \vee C) \wedge B$	$\varphi_6 = A \vee C \wedge B$
$\varphi_3 = (A \wedge C) \vee B$	$\varphi_7 = A \wedge B \wedge C$
$\varphi_4 = A \vee B$	$\varphi_8 = (\neg A \vee A) \wedge (A \vee A)$

Svar

- φ_1 är på CNF då den har två klausuler med en litteral i varje.
- φ_2 är på CNF.
- φ_3 är inte på CNF då den är en disjunktion av konjunktioner.
- φ_4 är på CNF då den består av en enda klausul.
- φ_5 är på CNF då även den består av en enda klausul.
- φ_6 är inte på CNF, även om de implicit parenteserna läggs till (för då får man $A \vee (C \wedge B)$ eftersom $\wedge$ binder hårdare än $\vee$.
- φ_7 är på CNF med tre klausuler om vardera en litteral.
- φ_8 är på CNF, en klausul kan innehåller samma litteral flera gånger, även om det är onödigt.

Uppgift 5

Vilka av följande formler är på disjunktiv normalform?

$\varphi_1 = A \wedge B$	$\varphi_5 = \neg A$
$\varphi_2 = (A \vee C) \wedge B$	$\varphi_6 = (A \wedge B) \vee C$
$\varphi_3 = A \wedge C \wedge B$	$\varphi_7 = A \vee C$
$\varphi_4 = A \wedge B \vee C$	$\varphi_8 = (\neg A \wedge A) \vee (A \wedge A)$

Svar

- φ_1 är på DNF då den består av en enda konjunktion.
- φ_2 är inte på DNF då den är en konjunktion av disjunktioner.
- φ_3 är på DNF eftersom den består av en enda konjunktion med tre litteraler.
- φ_4 är på DNF om de implicita parenteserna som följer av prioritetsreglerna läggs till kring $A \wedge B$.
- φ_5 är på DNF och består av en enda konjunktion.
- φ_6 är DNF.
- φ_7 är på DNF och har två konjunktioner, A och C.
- φ_8 är på DNF; en konjunktion kan innehåller samma litteral flera gånger.

Uppgift 6

Om ett axiomschema innehåller mallen $(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_1))$, vilka av följande formler är då axiom?

$\varphi_1 = (A \to (B \to A))$ $\qquad$ $\varphi_3 = (A \to (A \to A))$
$\varphi_2 = ((A \to A) \to (A \to (A \to A)))$ $\qquad$ $\varphi_4 = (A \to (B \to (C \vee D)))$

Svar Formlerna φ_1, φ_2 och φ_3 är axiom (α_1 och α_2 kan bytas mot samma formel), men i φ_4 har skilda förekomster av α_1 ersatts med olika formler och det är inte tillåtet.

Uppgift 7

Vilka av följande resonemang är acceptabla tillämpningar av modus ponens?

$$\frac{\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2}{\alpha_2}$$

1. A	(hypotes)		1. A	(hypotes)
2. $A \to B$	(hypotes)		2. $B \to C$	(hypotes)
3. B	(MP)		3. C	(MP)

Svar Det första resonmanget är korrekt, men i det andra stämmer inte premisserna överens; åter igen har skilda förekomster av α_1 ersatts med olika formler.

Uppgift 8

Om **S** är ett satslogiskt system och det gäller att $\vdash_{\mathbf{S}} A$, där A är en atom, är det då rimligt att tro att **S** är sunt?

Svar Om **S** är sunt så skulle $\vdash_{\mathbf{S}} A$ innebära att $\models A$, med andra ord att varje tolkning är en modell av A. Å andra sidan vet vi att det finns minst en tolkning v för vilken $v(A) = 0$, så vi kan dra slutsatsen att **S** inte är sunt.

Uppgift 9

(a) Ett *tertiärt* konnektiv tar tre argument, till skillnad från t ex binära konnektiv, vilka tar två. Hur många inekvivalenta tertiära konnektiv kan man definiera?

(b) Vad innebär det att en mängd konnektiv är komplett?

Svar

(a) Det finns 2^3 distinkta tolkningar, och för var och en av dessa kan konnektivet bli sant eller falsk, därför finns det $2^{(2^3)} = 256$ logiskt inekvivalenta tertiära konnektiv.

(b) En mängd konnektiv **C** är komplett om varje välformad formel φ kan skrivas om till en logiskt ekvivalent formel φ' som enbart innehåller konnektiv i **C**.

Uppgift 10

Låt $\Gamma = (\mathbf{S}, \mathbf{R})$, där $\mathbf{S} = \{\alpha_1\}$ och $\mathbf{R} = \{\textsf{Modus Ponens}\}$, vara ett satslogiskt bevissystem. Axiomschemat α_1 består som synes av en enda platshållare. Denna platshållare ersätts med en godtycklig formel varje gång schemat används i ett bevis.

(a) Är Γ sunt? Varför/varför inte?

(b) Är Γ fullständigt? Varför/varför inte?

(c) Finns det någon passande tillämpning för Γ?

Svar

(a) Nej, axiomschemat gör att varje satslogisk formel kan härledas oavsett hypoteser.

(b) Ja, eftersom alla satslogiska formler kan bevisas följa utifrån en mängd Φ så kan i synnerhet varje formel φ för vilken $\Phi \models \varphi$ gäller bevisas.

(c) Om man bortser från att vara ett illustrativt exempel så finns det ingen plats för Γ inom logiken.

Uppgift 11

(a) Finns det en satslogisk formel φ sådan att $\mathsf{length}(\varphi) > 1$ och som samtidigt är på både CNF och DNF? Varför/varför inte?

(b) Konvertera

$$(A \to B) \vee ((B \to A) \wedge ((C \to B) \to A))$$

till CNF och förenkla så långt som möjligt. Visa inte bara lösningen utan även lösningsvägen.

Svar

(a) Ja, till exempel $A \vee B \vee C$ som antingen kan betraktas bestå av en klausul som innehåller tre litteraler (CNF) eller tre distinkta klausuler som vardera innehåller en litteral (DNF).

(b) En av många möjligheter:

$$\begin{array}{rl}
0) & (A \to B) \vee ((B \to A) \wedge ((C \to B) \to A)) \\
1) & (\neg A \vee B) \vee ((\neg B \vee A) \wedge (\neg(\neg C \vee B) \vee A)) \\
2) & (\neg A \vee B) \vee ((\neg B \vee A) \wedge ((C \wedge \neg B) \vee A)) \\
3) & (\neg A \vee B) \vee ((\neg B \vee A) \wedge ((C \vee A) \wedge (\neg B \vee A))) \\
4) & ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \wedge ((\neg A \vee B) \vee ((C \vee A) \wedge (\neg B \vee A))) \\
5) & ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \wedge (((\neg A \vee B) \vee (C \vee A)) \wedge ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A))) \\
6) & (\neg A \vee B \vee \neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg B \vee A) \\
7) & \top \wedge \top \wedge \top \\
8) & \top
\end{array}$$

Förklaring av stegen:

1) Eliminera $\to$ och $\leftrightarrow$.
2) Flytta in $\neg$ till atomerna.
3) Distrubutivlagen.
4) Distrubutivlagen.
5) Distrubutivlagen.
6) Stryk överflödiga paranteser.
7) Förenkla.
8) Förenkla.

Uppgift 12

Evaluera resolventerna nedan

(a) $Res(A \vee \neg B, \neg A \vee B)$

(b) $Res(A \vee \neg B, \neg A)$

(c) $Res(A, \neg A)$

(d) $Res(A \vee \neg B, A \vee \neg C)$

(e) $Res(A \vee \neg B \vee C, B \vee \neg C \vee D)$

Svar

(a) $Res(A \vee \neg B, \neg A \vee B) = \{\neg B \vee B, A \vee \neg A\}$
(b) $Res(A \vee \neg B, \neg A) = \{\neg B\} = Res(A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B)$
(c) $Res(A, \neg A) = \{\perp\}$
(d) $Res(A \vee \neg B, A \vee \neg C) = \emptyset$ (ej samma sak som $\{\perp\}$!!!)
(e) $Res(A \vee \neg B \vee C, B \vee \neg C \vee D) = \{A \vee C \vee \neg C \vee D, A \vee \neg B \vee B \vee D\}$.

Uppgift 13

Ett bevissystem **S** är som bekant fullständigt om $\models \varphi$ implicerar $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$. Nu är frågan, finns det bevis inom Resolutionsystemet på formen $\vdash_{\mathbf{Res}} \varphi$?

Svar Eftersom **Res** inte har axiomscheman kräver varje bevis hypoteser, dvs det finns alltså inga bevis på formen $\vdash_{\mathbf{Res}} \varphi$.

Uppgift 14

Existerar en enhetsvederläggning så att

$$\{A \vee B, \neg A \vee B, A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B\} \vdash_{\mathbf{Res}} \perp \ ?$$

Svar Nej, för i alla försök till bevis av $\perp$ kommer den första resolutionen göras på två hypoteser, men det finns ingen enhetsklausul att hitta bland hypoteserna.

Uppgift 15

Vilka av nedstående klausuler är hornklausuler?

$\varphi_1 = (\perp)$
$\varphi_2 = (A \vee B)$
$\varphi_3 = (\neg A \vee B)$
$\varphi_4 = (\neg A \wedge B)$
$\varphi_5 = (A \vee \neg B \vee \neg C)$
$\varphi_6 = (A)$
$\varphi_7 = (\neg B)$
$\varphi_8 = (\neg A \wedge \neg B)$

Svar Av klausulerna på föregående oh-bild var alla utom φ_2, φ_4 och φ_8 hornklausuler.

2 Predikatlogik

Uppgift 16

Vilka av följande tripplar är signaturer?

(a) $(\emptyset,$
$\{c_1, c_2, c_3\},$
$\{f_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\})$

(b) $(\{x_i \mid i \in \mathbb{R}\},$
$\{2, 3, 5, 7, 11\},$
$\{+^{(2)}, -^{(1)}, -^{(2)}, *^{(2)}, /^{(2)}\})$

(c) $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\},$
$\{c_j \mid j \in \mathbb{R}\},$
$\{f_k^{(2)} \mid k \in \mathbb{R}\})$

Svar Trippel (a) är en signatur. Definitionen hindrar inte att en variabel-, konstant- och funktionsmängder är tom eller oändlig. Däremot krävs att variabelmängden är uppräkningsbar, vilket hindrar oss från att använda de reella talen som index på variablerna och därmed är (b) ingen signatur. Att mängden av konstanter eller funktioner inte är uppräkningsbara bryter dock inte mot definitionen, så (c) är en signatur.

Uppgift 17

Om $\mathbf{T} = (\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\pi, 1\}, \{+^{(2)}, -^{(1)}, -^{(2)}\})$ är en signatur, vilka av följande strängar tillhör då $\mathsf{terms}(\mathbf{T})$?

(a) x_2	(c) $x_2 + \pi$	(e) $+(-(\pi, x_0), 1)$
(b) π	(d) $+(x_2, \pi)$	(f) $-(+(x_{100}, x_{200}))$

Och om $\mathbf{T} = (\emptyset, \{\text{Jag}, \text{Skype}\}, \{\text{Friends}^{(1)}, \cup^{(2)}, \cap^{(2)}\})$?

(a) Jag	(c) x_2
(b) Skype	(d) $\text{Friends}(\text{Jag})$

(e) $\cap(\text{Friends}(\text{Friends}(\text{Jag})), \text{Friends}(\text{Friends}(\text{Skype})))$
(f) $\cap(\text{Friends}(\text{Friends}(\text{Friends}(\text{Friends}(\text{Jag})))), \text{Skype})$

Svar I första definitionen av $\mathbf{T}$ var det bara (c) som inte tillhörde mängden termer över $\mathbf{T}$, eftersom alla funktioner skrivs som prefix om inte annat uttryckligen sägs. Även i andra fallet var det bara (c) som inte följde definitionen av termer. Den här gången berodde det på att mängden av variabler är tom och innehåller alltså inte x_2.

Uppgift 18

Vilka av följande quadrupler kan sägas vara predikatlogiker?

(a) $(\{R_1^{(0)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}, R_4^{(2)}\},$
$\{\neg, \vee, \exists, \forall\},$
$\{(,),,\},$
$(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{c_1\}, \{f_1^{(0)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}\}))$

(b) $(\{R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, R_3^{(0)}\},$
$\{\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \leftrightarrow, \bot, \top\},$
$\{(,),,\},$
$(\emptyset, \emptyset, \emptyset))$

(c) $(\{=^{(2)}, <^{(2)}, >^{(2)}\},$
$\{\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg\},$
$\{(,),.\},$
$(\{x, y, z\}, \{\exists, \forall\}, \{\vee^{(2)}, \wedge^{(1)}, \wedge^{(2)}\}))$

Svar Att (a) är en predikatlogik är det ganska lätt att se. Även (b) är en predikatlogik, men eftersom möjligheten att skriva termer inte kan utnyttjas, och eftersom allkvantor och existenskvantor saknas bland konnektiven, så motsvarar (b) mer eller mindre en vanlig satslogik. I det tredje fallet, dvs (c), tittar vi inte längre på någon predikatlogik. Dels har hjälpsymbolen "komma" bytts ut mot en punkt, och dels är mängderna av variabler, konstanter och konnektiv inte disjunkta.

Uppgift 19

Om

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = (&\{R_1^{(0)}, R_2^{(1)}, R_3^{(2)}\},\\ &\{\exists, \forall, \neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \leftrightarrow, \bot, \top\},\\ &\{(,),,\},\\ &(\{x, y, z\}, \{c_1, c_2\}, \{f_1^{(2)}, f_2^{(2)}\}))\end{aligned}$$

är en predikatlogik, vilka av följande strängar tillhör då $\text{WF}(\mathbf{L})$?

(a) R_1	(f) $R_3(f_2(c_1, c_2))$
(b) $f_1(x, y)$	(g) $R_1 \wedge R_3(f_2(c_1, c_2), z)$
(c) $R_3(z, z)$	(h) $(\forall y)((\exists x)(\top \vee R_3(f_1(x, y), c_2)))$
(d) $(\exists x)(R_2(x))$	(i) $f_2(c_1, y) \rightarrow R_1$
(e) $\exists x\ R_2(x)$	(j) $(\exists x)(R_2(y))$

Svar

(a) Ja, R_1 behöver tar inga argument och är en välformad formel i sig själv.

(b) Nej, bara en term är inte en välformad formel.

(c) Ja.

(d) Ja.

(e) Nej, parenteser saknas. Jämför med (d).

(f) Nej, R_3 kräver två argument, inte ett.

(g) Ja, nu har R_3 fått ytterligare ett argument.

(h) Ja. Fortfarande helt ok.

(i) Nej, alla termer måste vara inneslutna i relationer.

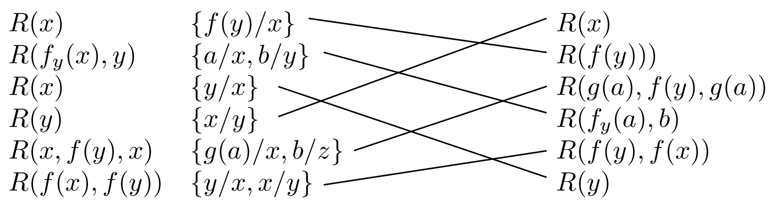
(j) Ok, men lite meningslöst att binda x men inte utnyttja bindningen.

Uppgift 20

Para ihop varje tuppel av en formel φ och en substituering σ med den resulterande formeln $\varphi\sigma$.

$R(x)$	$\{f(y)/x\}$	$R(x)$
$R(f_y(x), y)$	$\{a/x, b/y\}$	$R(f(y)))$
$R(x)$	$\{y/x\}$	$R(g(a), f(y), g(a))$
$R(y)$	$\{x/y\}$	$R(f_y(a), b)$
$R(x, f(y), x)$	$\{g(a)/x, b/z\}$	$R(f(y), f(x))$
$R(f(x), f(y))$	$\{y/x, x/y\}$	$R(y)$

Svar



Uppgift 21

Hitta en lämplig unifierare till varje formelpar.

$R(x)$	$R(y)$
$R(g(a))$	$R(x)$
$R(y)$	$R(y)$
$R(z, f(z))$	$R(a, x)$
$R(g(x))$	$R(f(y))$
$R(x)$	$R(f(x))$

Svar Det första och tredje paret har oändligt många unifierare. Det andra och fjärde paret har exakt en unifierare vardera, medan de två sista paren saknar unifierare.

$R(x)$	$R(y)$	$\{x/y\}, \{y/x\}, \{a/x, a/y\}, \ldots$
$R(g(a))$	$R(x)$	$\{g(a)/x\}$
$R(y)$	$R(y)$	$\{\}, \{a/y\}, \{x/y\}, \{g(f(g(b)))/y\}, \ldots$
$R(z, f(z))$	$R(a, x)$	$\{a/z, f(a)/x\}$
$R(g(x))$	$R(f(y))$	–
$R(x)$	$R(f(x))$	–

Uppgift 22

Låt

$$\varphi = (\forall x)(\forall y)(R_1(f_1(x,y), f_2(x,y)) \leftrightarrow R_1(c_1, f_3(x,y)))$$

vara en mening i en första ordningens predikatlogik som inte innehåller fler relationssymboler, funktionssymboler eller konstanter.

(a) Definiera en tolkning J som är en modell av φ.

(b) Definiera en tolkning J' som inte är en modell av φ.

Svar

(a)
- Domän $= \mathbb{N}^+$,
- $R_1 =<$,
- $c_1 = 1$,
- $f_1 = lcm$, $f_2 = \times$, och $f_3 = gcd$.

(b) som för (a), men nu låter vi $c_1 = 2$.

Uppgift 23

(a) Visa meningen φ' som är resultatet av att applicera skolemisering på meningen

$$\varphi = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x, c_0) \to P(f(x,z), y)) \ .$$

(b) En modell av φ i (a) är tolkningen J där

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{dom}(J) & = & \mathbb{Q}, \\ c_0 & = & 0, \\ P^J(u,v) & = & u = v, \text{ och} \\ f^J(u,v) & = & u \times v \ . \end{array}$$

Utvidga J till en modell av φ' genom att tilldela lämpliga funktioner till funktionssymboler som nu förekommer i φ' men inte i φ. En liten påminnelse; $\mathbb{Q}$ är mängden av alla rationella tal (ett rationellt tal kan alltid skrivas på formen $\frac{m}{n}$ där $n \neq 0$ och $m, n \in \mathbb{N}$).

Svar

(a) Efter skolemisering blir φ till

$$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x, c_0) \leftarrow P(f(x, f_z(x,y)), y)) \ .$$

(b) Tolkningen J utökas med

$$f_z^J(u,v) \quad = \quad v/u \ .$$

Uppgift 24

(a) Vad är en *unifierare* av atomära formler φ och φ' och när sägs den vara *mest generell*?

(b) Visa med hjälp av följande exempel hur algoritmen för att konstruera den mest generella unifieraren fungerar (där w, x, y, z är variablerna):

$$\begin{array}{rcl} P(g(y,z), x) & \text{och} & P(g(f(z), f(f(w))), f(y)) \\ P(g(x), f(y)) & \text{och} & P(g(g(y)), f(x)) \\ P(x, g(z,z)) & \text{och} & P(f(y), g(a,x)). \end{array}$$

Svar

(a) En unifierare av φ och φ' är en substitution σ sådan att $\varphi\sigma = \varphi'\sigma$. Den är mest generell om alla övriga unifierare σ' av φ och φ' kan skrivas som $\sigma\sigma_0$ för en lämplig substitution σ_0.

(b) I form av tabeller (där $f^i(t) = \underbrace{f(\cdots f(}_{i} t)\cdots)$ i första tabellen):

s_1, s_2	t_1, t_2	σ_{mgu}
$g(y, z), x$	$g(f(z), f^2(w)), f(y)$	
$g(f(z), z), x$	$g(f(z), f^2(w)), f(f(z))$	$f(z)/y$
$g(f^3(w), f^2(w)), x$	$g(f^3(w), f^2(w)), f^4(w)$	$f^3(w)/y, f^2(w)/z$
$g(f^3(w), f^2(w)), f^4(w)$	$g(f^3(w), f^2(w)), f^4(w)$	$f^3(w)/y, f^2(w)/z, f^4(w)/x$
Klar – mgu:n är $\{f^4(w)/x, f^3(w)/y, f^2(w)/z\}$		

s_1, s_2	t_1, t_2	σ_{mgu}
$g(x), f(y)$	$g(g(y)), f(x)$	
$g(g(y)), f(y)$	$g(g(y)), f(g(y))$	$g(y)/x$
Avbrott – $g(y)$ innehåller y!		

s_1, s_2	t_1, t_2	σ_{mgu}
$x, g(z, z)$	$f(y), g(a, x)$	
$f(y), g(z, z)$	$f(y), g(a, f(y))$	$f(y)/x$
$f(y), g(a, a)$	$f(y), g(a, f(y))$	$f(y)/x, a/z$
Avbrott – ingen av $a, f(y)$ är en variabel!		

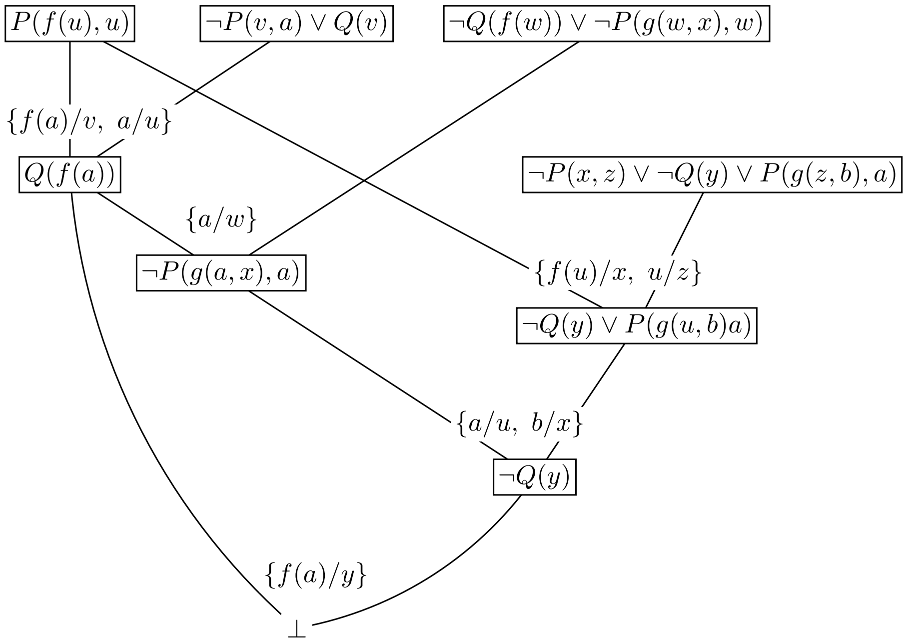
Uppgift 25

Visa mha ett resolutionsbevis att klausulmängden

$$\begin{aligned}\Phi = \{\ & P(f(u), u),\\ & \neg P(v, a) \vee Q(v),\\ & \neg Q(f(w)) \vee \neg P(g(w, x), w),\\ & \neg P(x, z) \vee \neg Q(y) \vee P(g(z, b), a)\ \}\end{aligned}$$

(där $u, \ldots, z$ är variablerna) är motsägelsefull. Beviset ska ritas som en graf. Den ska, för varje resolutionssteg, inte bara visa den resulterande formeln utan också mgu:n som ligger till grund för resolutionssteget. Förutom $\perp$ ska grafen inte innehålla onyttiga formler, dvs formler som inte används i något senare steg.

Svar En av många lösningar:



Uppgift 26

Bevisa att Resolution för satslogik är sunt, dvs att $\Phi \vdash_{\mathbf{Res}} \varphi$ implicerar $\Phi \models \varphi$.

Svar Beviset finns i oh-serien Resolution (del 2) på sida 4.