F. Drewes 2004-09-14

Logik för datavetare, HT04

– Gruppövning 2 –

(1) Bevisa mha resolution att $\{A \to B, B \to C\} \models A \to C$ (dvs implikation är transitiv). Gör det på två olkika sätt: Genom (a) ett direkt bevis och (b) ett vederläggningsbevis. Observera hur de två hänger ihop!

(2) Betrakta $\{A \to B, A \to C\} \models A \to (B \wedge C)$. Finns det för det här

   (a) en inputvederläggning som inte är en enhetsvederläggning,

   (b) en enhetsvederläggning som inte är en inputvederläggning och

   (c) en inputvederläggning som samtidigt är en enhetsvederläggning?

   För varje fall, konstruera ett sådant bevis om det finns och motivera annars varför det inte finns.

(3) Konstruera $\mathsf{base}\left(\Phi \cup \bigcup_{\varphi,\varphi'} Res(\varphi, \varphi')\right)$ där

$$\Phi = \{\neg A \vee B, \neg B, \neg C \vee \neg D, A \vee D, \neg A \vee B \vee C\}.$$

(4) Visa mha resolution att

$$\{\neg A \to (B \to C), B \vee C \vee \neg D, \neg A \to D\} \not\models C$$

   alltså att C inte är en logisk följd av $\{\neg A \to (B \to C), B \vee C \vee \neg D, \neg A \to D\}$.

Kommentarer…

(1) Efter omskrivning till klausulform är det som ska visas

$$\{\neg A \vee B, \neg B \vee C\} \models \neg A \vee C.$$

Del (a) är rätt trivialt:

1.	$\neg A \vee B$	(hypotes 1)
2.	$\neg B \vee C$	(hypotes 2)
3.	$\neg A \vee C$	(resolution på 1, 2 med $B, \neg B$)

För del (b) läggs det negerade målet till hypoteserna. Eftersom $\neg(\neg A \vee C) \equiv A \wedge \neg C$ måste alltså $\{\neg A \vee B, \neg B \vee C, A, \neg C\} \models \perp$ bevisas. Beviset kräver således två ytterligare resolutionssteg:

1.	$\neg A \vee B$	(hypotes 1)
2.	$\neg B \vee C$	(hypotes 2)
3.	$\neg A \vee C$	(resolution på 1, 2 med $B, \neg B$)
4.	A	(hypotes 3)
5.	C	(resolution på 3, 4 med $\neg A, A$)
6.	$\neg C$	(hypotes 4)
7.	$\perp$	(resolution på 5, 6 med $C, \neg C$)

Generellt gäller naturligtvis att om (!) det finns ett direkt bevis $\Phi \vdash_{\mathbf{Res}} l_1 \vee \cdots \vee l_n$ (där $l_1, \ldots, l_n$ är litteraler) så kan det skrivas om till ett vederläggningsbevis. Först härleds $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ som i det direkta beviset och sedan elimineras $l_1, \ldots, l_n$ mha de ytterligare hypoteserna $\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_n}$ (dvs komplementen till $l_1, \ldots, l_n$).

(2) Det som ska visas är

$$\{\neg A \vee B, \neg A \vee C, A, \neg B \vee \neg C\} \models \perp.$$

Alla tre typer av bevis är möjliga. Här kommer de (har inte kollat om det finns fler):

Inputvederläggning:

1.	$\neg A \vee B$	(hypotes 1)
2.	$\neg A \vee C$	(hypotes 2)
3.	A	(hypotes 3)
4.	$\neg B \vee \neg C$	(hypotes 4)
5.	$\neg A \vee \neg C$	(inputresolution på 1, 4 med $B, \neg B$ [ingen enhetsresolution!])
6.	$\neg C$	(inputresolution på 3, 5 med $A, \neg A$)
7.	$\neg A$	(inputresolution på 2, 6 med $C, \neg C$)
8.	$\perp$	(inputresolution på 3, 7 med $A, \neg A$)

Enhetsvederläggning:

1.	$\neg A \vee B$	(hypotes 1)
2.	$\neg A \vee C$	(hypotes 2)
3.	A	(hypotes 3)
4.	$\neg B \vee \neg C$	(hypotes 4)
5.	B	(enhetsresolution på 1, 3 med $\neg A, A$)
6.	C	(enhetsresolution på 2, 3 med $\neg A, A$)
7.	$\neg C$	(enhetsresolution på 4, 5 med $\neg B, B$)
8.	$\perp$	(enhetsresolution på 6, 7 med $C, \neg C$ [ingen inputresolution!])

Både och:

1.	$\neg A \vee B$	(hypotes 1)
2.	$\neg A \vee C$	(hypotes 2)
3.	A	(hypotes 3)
4.	$\neg B \vee \neg C$	(hypotes 4)
5.	B	(enhets- och inputresolution på 1, 3 med $\neg A, A$)
6.	$\neg C$	(enhets- och inputresolution på 4, 5 med $\neg B, B$)
7.	$\neg A$	(enhets- och inputresolution på 2, 6 med $C, \neg C$)
8.	$\perp$	(enhets- och inputresolution på 3, 7 med $A, \neg A$)

(3) $\mathsf{base}\left(\Phi \cup \bigcup_{\varphi,\varphi'} Res(\varphi, \varphi')\right) = \{\neg A, B \vee D, \neg B, \neg C \vee \neg D, A \vee \neg C, A \vee D\}$ (har dock gjort det i all hast så det kan innehålla något dumt slarvfel).

(4) Konstruera härledningsgrafen på ett uttömmande sätt för att visa att det inte är möjligt att komma fram till $\perp$. Eftersom resolution är fullständig för vederläggningar räcker det. För att göra grafen mindre stor, ta bort superklausuler så fort någon delklausul har skapats. Det är klokt att börja med att använda enhetsklausulen $\neg C$ eftersom den producerar delklausuler.