F. Drewes 2004-09-07

Logik för datavetare, HT04
– Gruppövning 1 –

(1) Utvidga blockvärldsexemplet till tre kuber och tre pyramider. Hur många tillåtna världar finns det om antagandena förblir samma som tidigare? Vad är antalet element i mängden $\mathrm{Mod}(\emptyset)$?

(2) Betrakta nu blockvärldarna med två kuber och två pyramider igen. Försök hitta en mängd formler Φ sådan att $\mathrm{Mod}(\Phi)$ är mängden av alla tillåtna världar.

(3) Om Φ är som i (2) och φ är en godtycklig wff, vad innebär då $\Phi \models \varphi$? Om $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, vad innebär det om $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \varphi$ är satisfierbar?

(4) Visa att absorbtionsregeln $\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi') \equiv \varphi$ är korrekt. (Det kräver att man kommer ihåg definitionen av ekvivalens!)

(5) Konvertera $(\neg(A \wedge (\neg(B \vee C)))) \vee (B \leftrightarrow C)$ till CNF. Förenkla så långt som möjligt och verifiera att resultatet är korrekt.

(6) Den här uppgiften känns ev (för?) bekant: Låt $\varphi = (A_1 \vee B_1) \wedge \cdots \wedge (A_n \vee B_n)$. Hur ser den ekvivalenta formeln på DNF ut och vad innebär det med tanke på SAT?

(7) Pga dualitetsprincipen kan man gissa att det inte bara finns problem som går att lösa fort på DNF men inte på CNF (alltså SAT)[1] utan också problem som tvärtom går att lösa fort på CNF men inte på DNF. Hitta ett sådant!

[1]om P≠NP förstås

Kommentarer...

(1) På min gruppövning kom vi på 194 stycken tillåtna världar men kan ha missat någon konfiguration eller räknat fel. Det gäller att systematiskt gå igenom alla. Mod($\emptyset$) är mängden av alla tolkingar, vars antal är 2^n där n är antalet atomer. Det finns 6 stycken $\mathsf{Is\_cube}(\ldots)$, $\mathsf{Is\_pyramid}(\ldots)$ och $\mathsf{On\_table}(\ldots)$ var, och 6^2 atomer $\mathsf{On}(\ldots,\ldots)$. Sammanlagt blir det alltså 2^{54} tolkningar.

(2) $\{\mathsf{Is\_cube}(K_1), \mathsf{Is\_cube}(K_2), \neg\mathsf{Is\_cube}(P_1), \neg\mathsf{Is\_cube}(P_2)\} \cup$
$\{\neg\mathsf{Is\_pyramid}(K_1), \neg\mathsf{Is\_pyramid}(K_2), \mathsf{Is\_pyramid}(P_1), \mathsf{Is\_pyramid}(P_2)\} \cup$
$\{\neg\mathsf{On}(x,y) \mid x \in \{K_1, K_2, P_1, P_2\}, y \in \{P_1, P_2\}\} \cup$
(inget kan ligga på en pyramid)
$\{\neg\mathsf{On}(x,x) \mid x \in \{K_1, K_2\}\} \cup$
(ingen kub kan ligga på sig själv)
$\{\mathsf{On\_table}(x) \leftrightarrow (\neg(\mathsf{On}(x,K_1) \vee \mathsf{On}(x,K_2))) \mid x \in \{K_1, K_2, P_1, P_2\}\} \cup$
(allt ligger antingen på bordet eller på en kub)
$\{\neg(\mathsf{On}(x,K_1) \wedge \mathsf{On}(x,K_2)) \mid x \in \{K_1, K_2, P_1, P_2\}\} \cup$
(... men aldrig på båda kuber)
$\{\neg(\mathsf{On}(x,z) \wedge \mathsf{On}(y,z)) \mid x, y \in \{K_1, K_2, P_1, P_2\}, x \neq y, z \in \{K_1, K_2\}\}$
(på en kub kan det maximalt finnas ett annat objekt)

OBS! Den här mängdnotationen med x, y, z får inte förväxlas med första ordningens predikatlogik (alltså $\forall x \ldots$). Här handlar det bara om en förkortning för en massa formler som inte innehåller variabler.

(3) $\Phi \models \varphi$ innebär att formeln φ är sann i alla tillåtna blockvärldar. Med andra ord φ uttrycker något förhållande som är sant i de världar vi intresseras av. Att $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \varphi$ är satisfierbar betyder att det finns en tillåten värld i vilken φ är sann.

(4) Om v är en tolkning som gör $\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi')$ sann så måste i synnerhet $\overline{v}(\varphi) = 1$ gälla. Och om φ är sann så är också $\varphi \vee \varphi'$ det och därmed gäller $\overline{v}(\varphi \wedge (\varphi \vee \varphi')) = 1$.

(5) Omskrivningen borde vara lätt. Observera att klausuler $(\cdots \vee A \vee \cdots \vee \neg A \vee \cdots)$ kan ersättas med $\top$ (samt att $\varphi \wedge \top = \varphi$). Resultatet blir då $\top$, dvs originalformeln är en tautologi (vilket är lätt att inse).

(6) För att formeln ska vara sann måste en av A_i, B_i i varje klausul $(A_i \vee B_i)$ vara sann. Alltså är den ekvivalenta formeln på DNF en disjunktion över alla formler $(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)$ där $X_i \in \{A_i, B_i\}$. Deras antal är naturligtvis 2^n. Alltså kan SAT inte lösas effektivt genom att först konvertera en formel till DNF.

(7) Problemet är: ”Formeln φ är en tautologi“. Om φ är på CNF får den, för att vara en tautologi, endast innehålla kausuler på formen $(\cdots \vee A \vee \cdots \vee \neg A \vee \cdots)$ (som då kan ersättas med $\top$, se ovan). Ni får själva fundera på varför problemet inte längre är enkelt för formler på DNF. (Tips: Icke-satisfierbarhet (av formler på CNF) är CoNP-komplett. Reducera det till det här problemet.)