Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström (e-post wikstrom)

Lösningsförslag till Omtentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar 1
för
DV & TDV

Tentamensdatum: 2003-08-29

Tentatalen är i huvudsak av två typer; översiktliga eller specialiserade map en viss problemklass/problemtyp. Svaren på vissa uppgifter är av mer allmän karaktär och i dessa fall hänvisas till material som behandlats på kursen. För de mer analysinriktade uppgifterna ges svar enligt nedan. Observera att lösningsförslagen nedan är i komprimerad form och för att få full poäng på tentan ska alla viktiga delsteg i lösningen tydligt framgå.

Med reservation för eventuella slarvfel.

Uppgift 1: (2+3 p)

a: Se kursmaterial.

b: Se kursmaterial, dock kan konstateras att första kolumnvektorn i matrisen A plus den andra är lika med den tredje vilket kan användas för att beskriva rang och linjärt oberoende basvektorer.

Uppgift 2: (2+3 p)

a: Se kursmaterial.

b: Börja med att studera rötterna genom att uppskatta när $x = e^{-x}$ ty $f(x) = x - e^{-x} = 0$. Villkor för konvergens: $|G'(x)| < 1$, här $G(x) = x + e^{-2x} - x^2$. Genom att uppskatta

$|1-2e^{-2x}-2x|$ för några olika x-värden i intervallet [0,1] så framgår när man har konvergens.

Uppgift 3: (3+2+2 p)

a:

$$T(v) = 33 - (a + bv + c\sqrt{v})(33 - T) = \ldots = 33 + (T-33)a + (vT - 33v)b + (\sqrt{v}T - 33\sqrt{v})c$$

$$T = 0 \quad \to \quad T(v) = 33 - 33a - 33vb - 33\sqrt{v}c \quad \to \quad -33a - 33vb - 33\sqrt{v}c = T(v) - 33$$

Insättning ger:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -33 & -32\cdot 2 & -33\sqrt{2} \\ -33 & -33\cdot 5 & -33\sqrt{5} \\ -33 & -33\cdot 8 & -33\sqrt{8} \\ -33 & -33\cdot 11 & -33\sqrt{11} \\ -33 & -33\cdot 14 & -33\sqrt{14} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{x} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 0-33 \\ -7.5-33 \\ -12-33 \\ -14.5-33 \\ -16.5-33 \end{bmatrix}}_{b}$$

b:

$$A^T A x = A^T b$$

Se vidare kursmaterial för motivering.

c: Interpolation kräver i detta fall 3 ekvationer (ty 3 obekanta i x). Se vidare kursmaterial.

Uppgift 4: (2+4+1 p)

a: Se kursmaterial.

b:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{6}f(x+2h) + f(x+h) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{3}f(x-h)\right) = \{Taylor\} = \ldots$$

$$f - termerna : -\frac{f}{6} + f - \frac{f}{2} - \frac{f}{3} = 0$$

$$f' - termerna : \ldots = f'$$

$$f^{(2)} - termerna : \ldots = 0$$

$$f^{(3)} - termerna : \ldots = 0$$

$$f^{(4)} - termerna : \ldots = \frac{-12h^3 f^{(4)}}{6 \cdot 4!} \neq 0$$

Alltså en $\mathcal{O}(h^3)$ metod.

c:

$$\frac{\frac{1}{6}\varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon}{h} = \frac{2\varepsilon}{h}$$

Uppgift 5: (4+2 p)

a: Se kursmaterial.

b:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},\ \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -2ty_2 - y_1^2 \end{bmatrix}$$

.

Nedan lösning till ett gammals tentatal som inte fanns med på just den här tentan:

Inför brännbollsyran, i Umeå, tränar Lisa och Pelle bollkast. De kastar iväg bollen österut med kastvinkel 30 grader, hastigheten 25 m/s och höjden 1.4 m över marken då bollen lämnar handen.
De har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella x- och y-axlar, x-axeln pekande åt öster och y-axeln pekande mot norr.
Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q\dot{x},\ \ \ddot{y} = -q(\dot{y} - a(z)),\ \ \ddot{z} = -9.81 - q\dot{z}$$

där $q = c\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}$. Luftmotståndskoefficienten c beror bl.a. av bollradien och massan. Tag $c = 0.05$. Vindriktningen är mot norr och vindstyrkan $a(z)$ är 7 m/s vid markytan och ökar med höjden enligt $a(z) = 7(1 + 0.05z)$.
Visa hur differentialekvationerna ovan kan skrivas om på standardform till ett system av första ordningens diff-ekvationer och ange startvektorns komponenter. Utnyttja att $\dot{x}$, $\dot{y}$ och $\dot{z}$ betecknar bollens hastighet i x-led, y-led respektive z-led för att bestämma startvektorn.
OBS! Du ska <u>inte</u> lösa diff-ekvationssystemet utan bara ställa upp det på standardform.

Inför

$$\begin{cases} x_1 = x \ \rightarrow \ \dot{x}_1 = \dot{x} \\ x_2 = \dot{x} \ \rightarrow \ \dot{x}_2 = \ddot{\mathrm{x}} = \ddot{\mathrm{x}}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_1 = y \ \rightarrow \ \dot{y}_1 = \dot{y} \\ y_2 = \dot{y} \ \rightarrow \ \dot{y}_2 = \ddot{\mathrm{y}} = \ddot{\mathrm{y}}_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} z_1 = z \ \rightarrow \ \dot{z}_1 = \dot{z} \\ z_2 = \dot{z} \ \rightarrow \ \dot{z}_2 = \ddot{\mathrm{z}} = \ddot{\mathrm{z}}_1 \end{cases}$$

Insättning ger nu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{x}_2 &= -q * x_2 = -q(x_2, y_2, z_1, z_2) * x_2 \\ \dot{y}_2 &= -q * (y_2 - a(z_1)) = -q(x_2, y_2, z_1, z_2) * (y_2 - a(z_1)) \\ \dot{z}_2 &= -9.81 - q * z_2 = -9.81 - q(x_2, y_2, z_1, z_2) * z_2 \end{aligned}$$

tillhörande begynnelsevärden ges av:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = x(t=0) = 0 \ \text{ m} \\ y_1(t=0) = y(t=0) = 0 \ \text{ m} \\ z_1(t=0) = z(t=0) = 1.4 \ \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t=0) = \dot{x}(t=0) = 25cos(\frac{\pi}{6}) \ \text{ m\textbackslash s} \\ y_2(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0 \ \text{ m\textbackslash s} \\ z_2(t=0) = \dot{z}(t=0) = 25sin(\frac{\pi}{6}) \ \text{ m\textbackslash s} \end{cases}$$

Låt $\bar{v} = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2]^T$, man får då på standardform följande:

$$\begin{cases} \dot{\bar{v}} = \bar{f}(\bar{v}, t) \\ \bar{v}(t_0) = \bar{v}_0 \end{cases}$$

där

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \ \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.4 \\ 25cos(\frac{\pi}{6}) \\ 0 \\ 25sin(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}, \ \bar{f}(\bar{v}, t) = \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ -q(v_3, v_4, v_5, v_6) * v_4 \\ -q(v_3, v_4, v_5, v_6) * (v_5 - a(v_3)) \\ -9.81 - q(v_3, v_4, v_5, v_6) * v_6 \end{bmatrix}$$