Hemtentamensuppgift 2: Ickelinjär parameterestimering

Per-Åke Wedin

23 april 2001

Målet med denna uppgift är att ni skall implementera Gauss-Newtons metod med linjesökning och använda den för att lösa cirkelanpassningsproblemet.

Uppgift a) Gauss-Newtons metod (6 poäng)

Implementera Gauss-Newtons algoritm i Matlab för lösning av problemet

$$\min_x \frac{1}{2} f(x)^T f(x),$$

där $f(x)$ är en funktion från $\Re^n$ till $\Re^m$.

Förslag till inparametrar:

- Namnet på residualfunktionen f och Jacobianen J. Tips! Om funktionerna ges systematiska namn, t ex `p1_f` (residualen), `p1_j` (jacobianen) behöver bara inledningen `'p1'` skickas.
- En startpunkt x_0.
- Maximalt antal tillåtna iterationer.
- Konvergenstoleransen ϵ.

Förslag till utparametrar:

- Förslag till lösning x_*.
- Antal iterationer som krävdes.
- En resultatkod som anger om metoden konvergerat eller divergerat (maximalt antal iterationer förbrukats).
- En matris med samtliga x_i lagrade kolumnvis. Kan vara bra för att återskapa iterationssekvensen för analys.

Till att börja med är det lämpligt att testa algoritmen för mycket enkla testexempel, exempelvis

$$f(x) = [y(x, t_1) - b_1, \ldots, y(x, t_{10}) - b_{10}]^T$$

för

1. $y(x, t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ och $b = (b_1, \ldots, b_{10})^T$ godtyckligt.
2. $y(x, t) = x_1 \sin x_2 t$ och $b_i = y(\hat{x}, t_i)$ t.ex. för $\hat{x} = [3, \pi]^T$ och välj $t_1, \ldots, t_{10}$ själva, t.ex. $t_i = (i-1)\pi/9$.

Välj gärna andra enkla problem för den inledande testningen.

Uppgift b) Gauss-Newton med linjesökning (3 poäng)

Modifiera funktionen i Uppgift a) till en ny funktion GaussA som inkluderar linjesökning med Armijos backtracking.

Tag $\alpha_{min} = 5 \cdot 10^{-3}$ som minsta steglängd och $\mu = 0.1$ i Armijos algoritm. **Sätt namn på konstanterna i koden för att underlätta läsbarhet och framtida förändringar.** Resultatkoden som anger om metoden konvergerat, måste nu också innehålla alternativet att man ej fått descent på grund av att $\alpha \geq \alpha_{min}$ ej gått att finna.

Använd samma testproblem som i Uppgift a).

Uppgift c) Cirkelapproximation (9 poäng)

Givet punkterna

$$\tilde{p}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, m,$$

bestäm den cirkel som bäst approximerar punkterna $\tilde{p}_i$ i minsta-kvadrat-mening. Cirkeln definieras av sin mittpunkt (c_x, c_y) och radie r.

Låt punkten

$$p_i = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \end{bmatrix} r, i = 1, \dots, m$$

på cirkeln approximera den givna punkten $\tilde{p}_i$ och minimera kvadratsumman

$$\frac{1}{2}(\|p_1 - \tilde{p}_1\|^2 + \cdots + \|p_m - \tilde{p}_m\|^2)$$

som funktion av

$$x = [c_x, c_y, r, \theta_1, \dots, \theta_m]^T.$$

Använd funktionen GaussA från Uppgift b) för att iterativt lösa uppgiften. Hur väljer man $f(x)$ och hur beräknar man jacobianen $J(x)$? Konsultera *Niclas råd för lösning av minsta-kvadratproblem*!

Uppgift d) Jämförelse av Gauss-Newton med och utan linjesökning (3 poäng)

Gör en jämförelse mellan algoritmerna från Uppgift a) och Uppgift b) då man väljer olika startapproximationer för parametervektorn x.

Uppgift e) Linjärt minsta-kvadratproblem för startpunktsberäkning (6 poäng)

För en punkt p_i på cirkeln gäller

$$\left(p_i - \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}\right)^T \left(p_i - \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}\right) - r^2 = 0. \tag{1}$$

De 3 alternativa parametrarna $(c_x, c_y, c_x^2 + c_y^2 - r^2)$ ingår linjärt i (1).

Oftast ligger punkterna $\tilde{p}_i, i = 1, \dots, m$ *nästan* på en cirkel. Om punkterna $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m$ ligger *exakt* på en cirkel kan man bestämma cirkeln genom att lösa ett *linjärt* minsta-kvadratproblem med nollresidual i de alternativa parametrarna. Använd detta linjära minsta-kvadratproblem för att bestämma en god startapproximation till problemet i Uppgift c).

Uppgift f) Reduktion till approximationsproblem i c_x, c_y och r (3 poäng)

För givna parametrar c_x, c_y och r kan man analytiskt bestämma den punkt p_i som bäst approximerar en given punkt $\tilde{p}_i$. Utnyttja detta för att reducera det icke-linjära minsta-kvadratproblemet i Uppgift c) till ett problem i de 3 parametrarna c_x, c_y och r. Hur blir funktion och jacobian för det reducerade problemet?