Linjär programmering

> "Interest in linear programming (LP) in its own right began in the late 1940's with the invention of the simplex method, and has continued unabated until the present day. Linear programming is viewed and taught in an astonishing variety of ways, to the extent that even an expert may be puzzled by someone else's version of the subject!"

Gill, Murray, Wright, "Numerical Linear Algebra and Optimization, vol. 1", Addison-Wesley, 1991, Kap. 7.

LP-problem

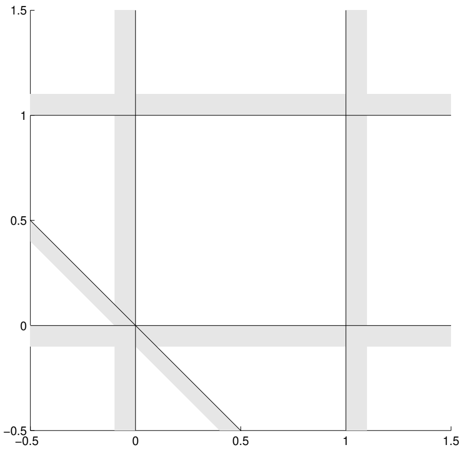
Ett *LP-problem* (Linjärt Programmerings-problem) är ett optimeringsproblem där objektfunktionen och bivillkoren är linjära funktioner.

Ett exempel på ett LP-problem är

$$
\begin{array}{rrcl}
 & & \displaystyle\max_{x_1,x_2} & x_2 \\
 & & \text{s.t.} & \\
x_1 & & \geq & 0 \\
 & x_2 & \geq & 0 \\
x_1 & +x_2 & \geq & 0 \\
x_1 & & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 1
\end{array} \tag{1}
$$

LP-problem, exempel

Det tillåtna området för problem (1) är



En *descent*orienterad ansats till linjär programmering

Den generella optimeringsalgoritmen:

- Bestäm startgissning x_0.
- Upprepa för $k = 0, 1, \ldots$
  - Om x_k optimal, avsluta.
  - Bestäm *sökriktning* p_k.
  - Bestäm *steglängd* α_k.
  - $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

Bivillkor

Vi har två olika sorters bivillkor: likhets- och olikhetsbivillkor. Vi kommer endast att jobba med olikhetsbivillkor.

Linjära olikhetsbivillkor kan skrivas som

$$a^T x \geq \beta$$

för någon vektor a. En punkt $\bar{x}$ sägs vara *tillåten* med avseende på villkoret $a^T x \geq \beta$ om villkoret är satisfierat, dvs $a^T \bar{x} \geq \beta$. Om villkoret är satisfierat med likhet ($a^T \bar{x} = \beta$) sägs villkoret vara *aktivt*, annars *inaktivt*.

Ett bivillkor $a^T x \leq \beta$ kan skrivas om till $-a^T x \geq -\beta$.

Ett bivillkor $a^T x = \beta$ kan skrivas om till två olikhetsbivillkor $a^T x \geq \beta$ och $a^T x \leq \beta$.

Vi behöver därför endast resonera runt $\geq$-bivillkor.

Mängder av bivillkor

En mängd bivillkor $\{a_i^T x \geq \beta_i, i = 1, \ldots, m\}$ representeras vanligen av en $m \times n$-matris A och m-vektor b:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

och skrivs

$$Ax \geq b,$$

där $\geq$ appliceras komponentvis.

En punkt $\bar{x}$ sägs vara *tillåten* med avseende på mängden olikheter $Ax \geq b$ om $A\bar{x} \geq b$.

Systemet $Ax \geq b$ sägs vara *konsistent* om det har någon tillåten punkt.

Standardform

Vi kommer att skriva om alla LP-problem till följande standardform:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array}$$

Ett problem

$$\max_x c^T x$$

skrivs om till

$$\min_x -c^T x.$$

Standardform, exempel

Vårt exempelproblem (1)

$$\begin{array}{ccccc} & & \max\limits_{x_1,x_2} & x_2 \\ & & \text{s.t.} & \\ x_1 & & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & +x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & & \leq & 1 \\ & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

blir på standardform

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array}$$

med

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Aktiva och inaktiva mängder av bivillkor

För ett villkor $a_i^T x \geq \beta_i$ definieras *residualen* i punkten $\bar{x}$ som $r_i(\bar{x}) = a_i^T \bar{x} - \beta_i$. Residualen är positiv då villkoret är inaktivt, noll då villkoret är aktivt och negativt då villkoret ej är uppfyllt.

Residualvektorn r blir för mängden av villkor $Ax \geq b$

$$r(\bar{x}) = A\bar{x} - b$$

Givet olikheten $Ax \geq b$ definierar vi indexmängden $\mathcal{A}(\bar{x})$ som mängden av index $\{i : r_i(\bar{x}) = 0\}$, dvs de villkor som uppfylls med likhet i punkten $\bar{x}$. Matrisen bestående av raderna i $\mathcal{A}(\bar{x})$ betecknas $A_{\mathcal{A}}(\bar{x})$.

Förändring av objektfunktionens värde

Objektfunktionen till minimeringsproblemet skrivs

$$f(x) = c^T x,$$

där c är en konstant vektor. Gradienten till $f(x)$ blir då

$$\nabla f(x) = c.$$

Definiera $F(\alpha)$ som funktionsvärdet utgående från en punkt $\bar{x}$ längs en sökriktning p och med steglängden α:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= f(\bar{x} + \alpha p) = c^T(\bar{x} + \alpha p) \\ &= c^T\bar{x} + \alpha c^T p = f(\bar{x}) + \alpha c^T p. \end{aligned}$$

Nedförsriktningar

Förändringen i funktionsvärdet beror alltså på $c^T p$. $c^T p = 0$ innebär att

$$F(\alpha) = f(\bar{x}) + \alpha \underbrace{c^T p}_{=0} = f(\bar{x})$$

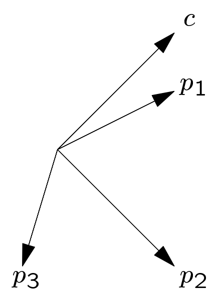
förblir konstant. $c^T p < 0$ innebär att

$$F(\alpha) = f(\bar{x}) + \alpha \underbrace{c^T p}_{<0} < f(\bar{x})$$

för $\alpha > 0$, dvs funktionen minskar. Riktningen p kallas då för *nedförsriktning*.

Vektorriktningar

För figuren nedan gäller att $p_1^T c > 0$, $p_2^T c = 0$ och $p_3^T c < 0$.

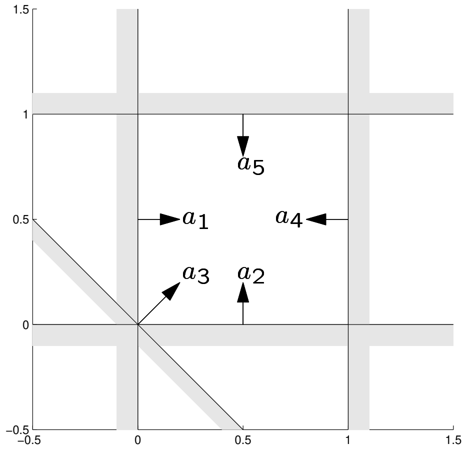


Gradienter till bivillkoren

Varje bivillkor delar upp $\Re^n$ i två halvor av tillåtna punkter $\{x : a^T x \geq \beta\}$ och otillåtna punkter $\{x : a^T x < \beta\}$.

Gradienten till ett bivillkor $a^T x \geq \beta$ är a. Gradienten är alltid riktad *inåt* den tillåtna mängden.

Gradienterna till bivillkoren i vårt exempel visas på nästa sida.



Förflyttning längs en riktning

Studera en (icke nödvändigtvis tillåten) punkt $\bar{x}$, en riktning p och ett villkor $a_i^T x \geq \beta_i$. För ett steg α längs p gäller att

$$a_i^T(\bar{x} + \alpha p) = a_i^T \bar{x} + \alpha a_i^T p.$$

Motsvarande residual blir

$$r_i(\bar{x} + \alpha p) = a_i^T \bar{x} + \alpha a_i^T p - \beta_i = r_i(\bar{x}) + \alpha a_i^T p.$$

Om $a_i^T p = 0$ förändras inte värdet på residualen, men för $a_i^T p \neq 0$ går det att räkna ut hur långt steg σ_i vi ska ta för att satisfiera och aktivera bivillkoret:

$$\begin{aligned} r_i(\bar{x} + \sigma_i p) &= 0 \\ r_i(\bar{x}) + \sigma_i a_i^T p &= 0 \\ &\Downarrow \\ \sigma_i &= \frac{r_i(\bar{x})}{-a_i^T p} \end{aligned}$$

som är definierat då $a_i^T p \neq 0$. Då $a_i^T p = 0$ definieras σ_i som ∞ om $r_i(\bar{x}) \geq 0$ och $-\infty$ annars.

Tillåtna riktningar

Vektorn $p \neq 0$ är en *tillåten riktning* i den tillåtna punkten $\bar{x}$ med avseende på villkoret $a_i^T x \geq \beta_i$ om det existerar en *positiv* skalär τ_i sådan att

$$r_i(\bar{x} + \alpha p) \geq 0 \ , \ 0 \leq \alpha \leq \tau_i.$$

För ett inaktivt bivillkor ($r_i(\bar{x}) > 0$) ser vi att alla riktningar p är tillåtna, medan för ett aktivt bivillkor ($r_i(\bar{x}) = 0$) gäller att

$$\begin{aligned} r_i(\bar{x} + \alpha p) &\geq 0 \\ &\Downarrow \\ a_i^T(\bar{x} + \alpha p) - \beta_i &= r_i(\bar{x}) + \alpha a_i^T p \\ &= \alpha a_i^T p \geq 0, \ \alpha > 0 \\ &\Updownarrow \\ a_i^T p &\geq 0 \end{aligned}$$

Vi ser att om $a_i^T p = 0$ så förblir villkoret aktivt, medan $a_i^T p > 0$ leder till att villkoret blir inaktivt och $a_i^T p < 0$ leder till att villkoret inte längre uppfylls.

Tillåtna riktningar, forts.

För en mängd av bivillkor gäller att p är en tillåten riktning från den tillåtna punkten $\bar{x}$ om $p \neq 0$ och det existerar en positiv skalär τ sådan att

$$\begin{aligned} r(\bar{x}+\alpha p) &\geq 0 \ , \ 0 \leq \alpha \leq \tau \\ &\Updownarrow \\ A(\bar{x}+\alpha p) &\geq b \ , \ 0 \leq \alpha \leq \tau \end{aligned}$$

Då de enda begränsningarna på p kommer från de aktiva bivillkoren, gäller att p är tillåten omm

$$\begin{aligned} a_i^T p &\geq 0 \ \ \forall i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \\ &\Updownarrow \\ A_{\mathcal{A}} p &\geq 0, \end{aligned}$$

där $A_{\mathcal{A}}$ betecknar den aktiva mängdmatrisen i $\bar{x}$.

Tillåtna nedförsriktningar

Studera en konsistent villkorsmängd $Ax \geq b$ och en tillåten punkt x^*. Om det existerar en tillåten nedförsriktning i x^* så kan x^* inte vara en minpunkt.

En riktning $p \neq 0$ är tillåten om $A_{\mathcal{A}} p \geq 0$ och nedförsriktning om $c^T p < 0$.

Omm ingen sådan riktning existerar är x^* en minpunkt. Detta inträffar om $\lambda \geq 0$, där λ är lösningen till

$$A_{\mathcal{A}}^T \lambda = c.$$

Val av sökriktning

Om vi löser

$$A_{\mathcal{A}}^T \lambda = c$$

och något λ_i är negativt, så kan en sökriktning p bestämmas som lösningen till

$$A_{\mathcal{A}} p = e_i,$$

där e_i är en vektor med i:te elementet 1 och resten 0. Det innebär att $r_i(\bar{x}+\alpha p) > 0$, dvs villkor i blir inaktiverat.

Väljes p på detta sätt blir p en nedförsriktning, ty $c^T p = (A_{\mathcal{A}}^T \lambda)^T p = \lambda^T A_{\mathcal{A}} p = \lambda^T e_i = \lambda_i < 0$.

Hörn

Ett *hörn* är en extrempunkt i den tillåtna mängden som inte kan ligga på någon linje mellan två andra tillåtna punkter. Ett hörn är begränsat i alla n dimensioner, dvs den aktiva mängdmatrisen $A_{\mathcal{A}}$ har minst n linjärt oberoende rader. Om $A_{\mathcal{A}}$ har fler än n rader kallas hörnet för *degenererat*, annars kallas det för *icke-degenererat*.

Det går att visa att minimum för ett LP-problem antas i ett hörn.

Steglängd till nästa hörn

Antag att $\bar{x}$ är ett hörn i den tillåtna mängden och vi tagit ut en sökriktning p från $\bar{x}$. Låt mängden $\mathcal{D}$ beteckna mängden av alla inaktiva villkor som minskar längs p, dvs

$$j \in \mathcal{D} \text{ om } a_j^T p < 0.$$

Om vi bestämmer σ_j som det längsta steg som kan tas längs med p utan att villkor j aktiveras dvs,

$$\sigma_j = \begin{cases} \dfrac{-r_j(\bar{x})}{a_j^T p} & \text{om } j \in \mathcal{D} \\ +\infty & \text{annars} \end{cases},$$

så blir

$$\alpha = \min_j \sigma_j$$

det längsta steg vi kan ta innan något bivillkor aktiveras. Den nya punkten blir då $\bar{x} + \alpha p$.

Simplex-metoden

Låt x_k beteckna den aktuella punkten efter n iterationer. Givet ett icke-degenererat hörn x_k så blir algoritmen för simplex-metoden:

- Bestäm en tillåten nedförsriktning p i x_k:
  - Identifiera den aktiva mängden $A_{\mathcal{A}}$ i $\bar{x}$.
  - Lös $A_{\mathcal{A}}^T \lambda = c$.
  - Välj i sådan att $\lambda_i < 0$.
  - Bestäm sökriktningen p som lösningen till $A_{\mathcal{A}} p = e_i$.
- Bestäm steglängden $\alpha = \min_j \sigma_j$, där

$$\sigma_j = \begin{cases} \dfrac{-r_j(\bar{x})}{a_j^T p} & \text{om } j \in \mathcal{D} \\ +\infty & \text{annars} \end{cases}.$$

- $x_{k+1} = x_k + \alpha p$.

Starthörn

Den presenterade simplex-algoritmen kräver att startpunkten x_0 är ett hörn i den tillåtna mängden. Under förutsättning att bivillkorsmatrisen A har full rang kan vi använda följande algoritm för att finna ett tillåtet hörn givet en tillåten punkt x_0. Låt $\mathcal{A}_k$ beteckna $\mathcal{A}(x_k)$ och A_k beteckna $A_{\mathcal{A}_k}$

- Om rang(A_k)=n avsluta; x_k är ett hörn.
- Finn index j för ett inaktivt bivillkor ($j \notin \mathcal{A}_k$) vars normal a_j är linjärt oberoende av A_k^T, d v s

$$\text{rang}\begin{pmatrix} A_k \\ a_j^T \end{pmatrix} = \text{rang}(A_k) + 1$$

- Beräkna en vektor p_k som minskar residualen till bivillkor j och stannar kvar på bivillkoren i $\mathcal{A}_k$, t ex genom att lösa

$$\begin{pmatrix} A_k \\ a_j^T \end{pmatrix} p_k = \begin{pmatrix} 0_k \\ -1 \end{pmatrix},$$

  där 0_k är en nollvektor av lämplig längd.
- Definiera indexmängden $\mathcal{D}_k$ av minskande bivillkor längs p_k som

$$\mathcal{D}_k = \left\{ i : a_i^T p_k < 0 \right\}.$$

- Beräkna σ som det minsta positiva steg från x_k längs p_k till ett minskande bivillkor:

$$\sigma = \min\{ \frac{r_i(x_k)}{-a_i^T p} \ : \ i \in \mathcal{D}_k \}.$$

- $x_{k+1} = x_k + \sigma p_k$, $k = k + 1$.

Tvåfas-simplex

Om vår startpunkt x_0 inte ens är tillåten kan vi formulera ett annat LP-problem och lösa detta för att få en tillåten punkt x_0'. Detta kallas *tvåfas-simplex*.

För varje bivillkor i introducerar vi en artificiell variabel v_i som får representera hur mycket vi måste lägga till varje bivillkor för att det ska bli uppfyllt.

$$\begin{array}{rrcr} \multicolumn{2}{c}{\min\limits_{x_1,x_2}} & & -x_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{då}} \\ x_1 & & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & +x_2 & \geq & 0 \\ -x_1 & & \geq & -1 \\ & -x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

ersätts med

$$\begin{array}{rrrrrrrcr} \multicolumn{3}{c}{\min\limits_{x_1,x_2,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5}} & \multicolumn{6}{l}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} \\ \multicolumn{9}{c}{\text{då}} \\ x_1 & & +v_1 & & & & & \geq & 0 \\ & x_2 & & +v_2 & & & & \geq & 0 \\ x_1 & +x_2 & & & +v_3 & & & \geq & 0 \\ -x_1 & & & & & +v_4 & & \geq & -1 \\ & -x_2 & & & & & +v_5 & \geq & -1 \\ & & v_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & v_2 & & & & \geq & 0 \\ & & & & v_3 & & & \geq & 0 \\ & & & & & v_4 & & \geq & 0 \\ & & & & & & v_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Tvåfas-simplex, forts.

Originalproblemet

$$\begin{array}{rcl} & \min\limits_x & c^T x \\ & \text{s.t.} & \\ Ax & \geq & b \end{array}$$

ersätts alltså med

$$\begin{array}{ccc} & \min\limits_{x,v} & \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \\ & \text{d} & \\ \begin{bmatrix} A & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} & \geq & \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Startpunkt för det modifierade problemet

Givet en punkt x_0 väljer vi startvärden på variablerna v_i enligt

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{om } a_i^T x_0 \geq \beta_i \\ \beta_i - a_i^T x_0 & \text{annars} \end{cases},$$

d v s om bivillkor i redan är uppfyllt blir $v_i = 0$, annars väljs v_i så att bivillkor i blir uppfyllt med likhet.

Om det finns något tillåtet hörn till originalproblemet kommer lösningen på det modifierade problemet att vara $v_i = 0$.