Fouriertransformen

Givet en funktion $f : \Re \to \mathcal{C}$ definieras *Fouriertransformen* som

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ut}dt.$$

Dess invers definieras som

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ut}du.$$

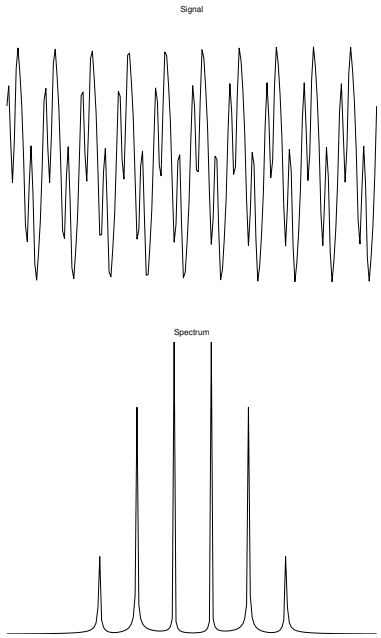
Funktionerna $f(t)$ och $F(u)$ kallas *transformpar* och är unika.

Fouriertransformen

Fouriertransformen beskriver sambandet mellan en funktion f av t i "rummet" eller "tiden" till en funktion F av frekvensen u.

Fouriertransformen kan användas till att få ut frekvensinnehållet i en given signal. En förståelse av fouriertransformen är central för t.ex. bild- och signalanalys.

Exempel



Existens

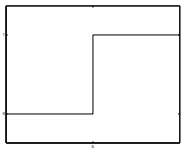
Fouriertransformen existerar om

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$
- $f(t)$ är kontinuerlig eller har ett ändligt antal diskontinuiteter.

Några användbara funktioner

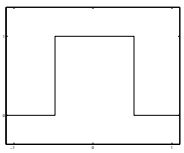
Stegfunktionen (Heavisidefunktionen)

$$step(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Rektangelfunktionen

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Notera att

$$rect(t) = step(t + 1/2) - step(t - 1/2)$$

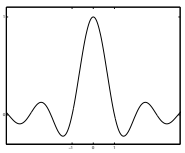
och att

$$\int_{-\infty}^{\infty} rect(t)dt = 1.$$

Några användbara funktioner

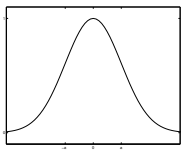
Sinc-funktionen

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Gauss-funktionen

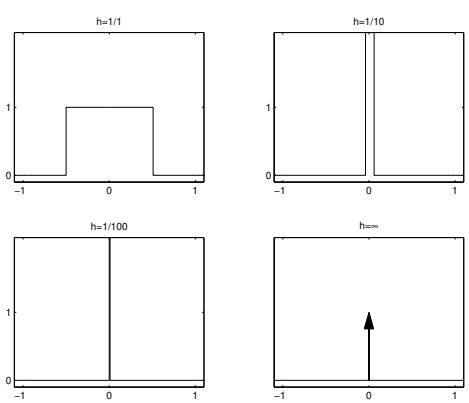
$$g(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^2}$$



Dirac-funktionen

Dirac-funktionen eller impuls-funktionen är en generaliserad funktion som är användbar i många signalbehandlingssammanhang. Den kan definieras på många olika sätt, t.ex.

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} rect\left(\frac{t}{h}\right)$$



Dirac-funktionen

Dirac-funktionen har följande egenskaper:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1, \ \forall \varepsilon > 0.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0).$
- Fouriertransformen av $\delta(t)$ är
  $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i2\pi ut}dt = e^{0u} = 1.$

  En impuls innehåller alltså lika mycket av alla frekvenser.

  På motsvarande sätt är

  $$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(u)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)e^{i2\pi ut}du = e^{0t} = 1.$$

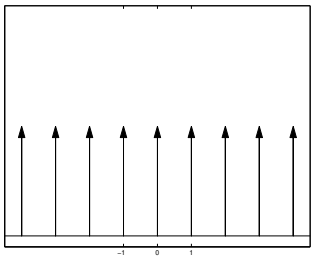
  Fouriertransformen av en konstant funktion är alltså en impulsfunktion.

Shah-funktionen

Shah-funktionen eller samplingsfunktionen definieras som

$$III(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k),$$

dvs en följd av impulser. Den används mycket vid resonemang kring diskreta (samplade) signaler.



Egenskaper hos fouriertransformen

- $\mathcal{F}\{f(t-h)\} = e^{-i2\pi uh}F(u)$
- $\mathcal{F}^{-1}\{F(u-h)\} = e^{i2\pi th}f(t)$
- $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F(u/a)$
- $\mathcal{F}\{f(t)+g(t)\} = F(u)+G(u)$
- $\mathcal{F}\{kf(t)\} = kF(u)$

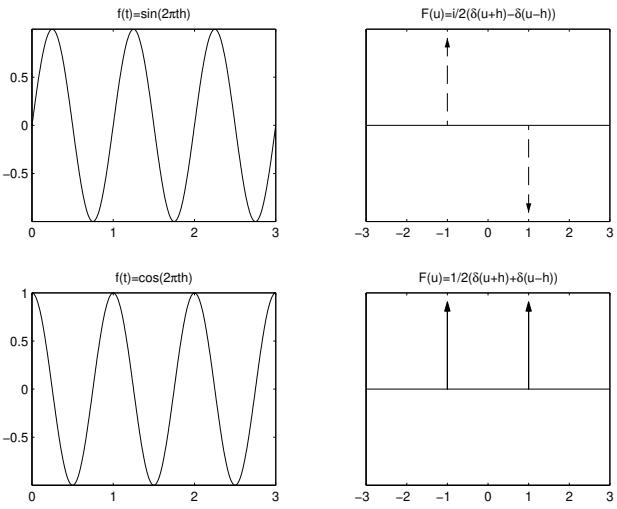
Fouriertransformen av sin och cos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}\{\delta(u)\} = 1.\\
&\mathcal{F}^{-1}\{\delta(u+h)\} = e^{-i2\pi th}\cdot 1.\\
&\mathcal{F}^{-1}\{\delta(u-h)\} = e^{i2\pi th}\cdot 1.\\
&\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}(\delta(u+h)+\delta(u-h))\right\} =\\
&\quad = \frac{1}{2}\left(e^{i2\pi th}+e^{-i2\pi th}\right) = \cos 2\pi th.\\
&\mathcal{F}^{-1}\left\{i\frac{1}{2}(\delta(u+h)-\delta(u-h))\right\} =\\
&\quad = i\frac{1}{2}\left(e^{i2\pi th}-e^{-i2\pi th}\right) = \sin 2\pi th.
\end{aligned}$$

Fouriertransformen av sin och cos är alltså

$$\mathcal{F}\{\cos 2\pi th\} = \frac{1}{2}(\delta(u+h)+\delta(u-h))$$
$$\mathcal{F}\{\sin 2\pi th\} = i\frac{1}{2}(\delta(u+h)-\delta(u-h))$$

Fouriertransformen av sin och cos



Andra transformpar

$e^{i2\pi\omega t}$	$\delta(u-\omega)$
$\delta(x)$	1
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi u^2}$
$rect(t)$	$sinc(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}$
$III(t)$	$III(u)$

Notera att

$$\begin{aligned} G(u) = \mathcal{F}\{F(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i2\pi ut}dt \\ = [v = -u] &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i2\pi vt}dt \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{F(t)\} = f(v) = f(-u). \end{aligned}$$

Detta innebär att om vi kan använda fouriertransformen "fel" väg om vi bara byter tecken på variabeln. T.ex. är $\mathcal{F}\{sinc(t)\} = rect(-u)$.

Jämna och udda funktioner

Givet en funktion $f : \Re \to \mathcal{C}$ definierar vi följande:

- f är *jämn* om
$$f(t) = f(-t), \forall t.$$
- f är är *udda* om
$$f(t) = -f(-t), \forall t.$$
- f är *Hermitiansk* om
$$f(t) = f^\star(-t), \forall t,$$
där $t^\star$ är det komplexa konjugatet till t,
$$\Re(t) = \Re(t^\star), \Im(t) = -\Im(t^\star).$$

Alla funktioner $f(t)$ kan skrivas som en summa av en jämn och en udda funktion:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t),$$

där

$$\begin{aligned} f_e(t) &= \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \\ f_o(t) &= \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)). \end{aligned}$$

Jämna och udda funktioner

Om vi använder Eulers ekvation $e^{it} = \cos t + i \sin t$, och skriver om fouriertransformen till

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ut}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos 2\pi utdt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin 2\pi utdt \end{aligned}$$

och dessutom delar upp $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ får vi

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\cos 2\pi utdt + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t)\cos 2\pi utdt}_{=0} \\ &- \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\sin 2\pi utdt}_{=0} - i\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t)\sin 2\pi utdt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\cos 2\pi utdt - i\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t)\sin 2\pi utdt \\ &= F_e(u) + iF_o(u). \end{aligned}$$

$F_e(u) = \mathcal{F}\{f_e(t)\}$ är alltså reell och jämn.

$F_o(u) = \mathcal{F}\{f_o(t)\}$ är imaginär och udda.

Faltning (*convolution*)

Givet två funktioner $f, g : \Re \to \mathcal{C}$, definieras *faltningen* (*eng: convolution*) av f och g som

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

och betecknas $h = f \star g$.

Faltning i det ena rummet motsvaras av multiplikation i det andra:

$$H(u) = F(u)G(u)$$

Samplade signaler

Shah-funktionen är central för förståelsen av samplingsprocessens inverkan pä signalen. Den är definierad som en oändlig summa av impulser med avständ 1

$$III(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k).$$

Fouriertransformen av Shah-funktionen är en shah-funktion

$$\mathcal{F}\{III(t)\} = III(u).$$

Vi kommer att vara intresserade av att sampla funktioner med olika samplingsavständ. Lät oss därför studera shah-funktionen lite närmare.

Samplade signaler

Först studerar vi Dirac-funktionen $\delta(at)$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) f(t)dt &= \left[at = s,\ t = \frac{s}{a},\ dt = \frac{ds}{a}\right] \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) f\left(\frac{s}{a}\right) ds \\ &= \frac{1}{|a|} f(0) \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|a|}\delta(t)\right) f(t)dt.\end{aligned}$$

Alltså är $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$. Då blir

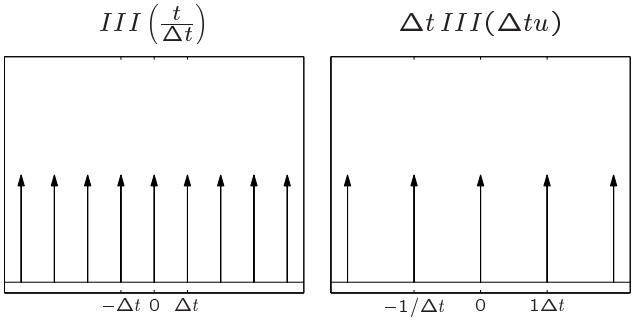
$$\begin{aligned}III(at) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(at-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(a\left(t-\frac{k}{a}\right)\right) \\ &= \frac{1}{|a|}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\frac{k}{a}\right).\end{aligned}$$

Samplade signaler

Funktionen $III(t/\Delta t)$ har avståndet $\Delta t > 0$ mellan impulserna. Dess fouriertransform är

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{III\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right\} &= \Delta t\, III(\Delta t u) \\ &= \Delta t \frac{1}{|\Delta t|}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(u-\frac{k}{\Delta t}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(u-\frac{k}{\Delta t}\right)\end{aligned}$$

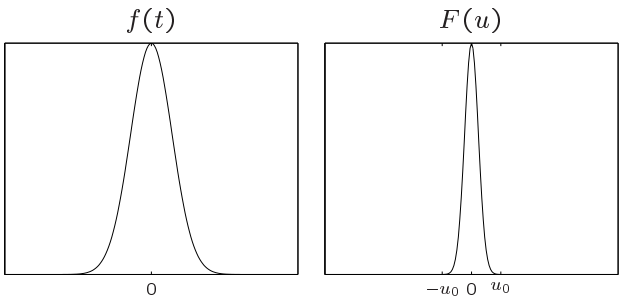
som har ett impulsavständ pä $1/\Delta t$ i frekvensdomänen.



Sampling av bandbegränsad funktion

Antag att vi har en funktion $f(t)$ som är *bandbegränsad* vid en frekvens u_0

$$F(u) = 0, \quad |u| > u_0$$

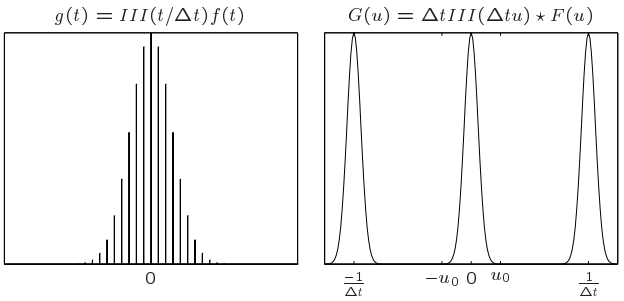


Notera att $f(t)$ därmed får oändlig utsträckning.

Sampling av bandbegränsad funktion

Sampling av funktionen $f(t)$ kan ses som en multiplikation med $III(t/\Delta t)$, vilket motsvarar en faltning med $\Delta t III(\Delta t u)$ i frekvensdomänen.

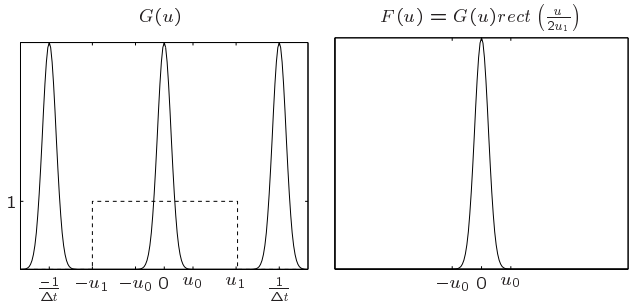
Frekvensfunktionen blir periodisk med period $1/\Delta t$.



Rekonstruktion av samplad signal

Den samplade funktionen $g(t)$ innehåller mindre information än den ursprungliga signalen $f(t)$. Trots det är det möjligt att rekonstruera hela $f(t)$ från $g(t)$ under vissa förutsättningar.

Spektrat $G(u)$ innehåller upprepade kopior av $F(u)$ separerade med avståndet $1/\Delta t$. Om $1/\Delta t \geq u_0$ så kommer dessa kopior ej att överlappa varandra. Alltså kan vi återfå $F(u)$ genom att multiplicera $G(u)$ med $rect\left(\frac{u}{2u_1}\right)$, där $u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{\Delta t} - u_0$.



Rekonstruktion av samplad signal

Givet det rekonstruerade spektrat får vi den ursprungliga funktionen som

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{G(u)rect\left(\frac{u}{2u_1}\right)\right\} \\ &= g(t) \star 2u_1 sinc(2u_1 t) \\ &= g(t) \star 2u_1 \frac{\sin 2\pi u_1 t}{2\pi u_1 t} \end{aligned}$$

Rekonstruktion av samplad signal

Vi kan alltså återskapa den ursprungliga $f(t)$ från den samplade $g(t)$ genom att falta med en lämplig $sinc$-funktion under förutsättning att:

- $f(t)$ var bandbegränsad vid u_0 och
- vi väljer en samplingsfrekvens $\frac{1}{\Delta t}$ så att

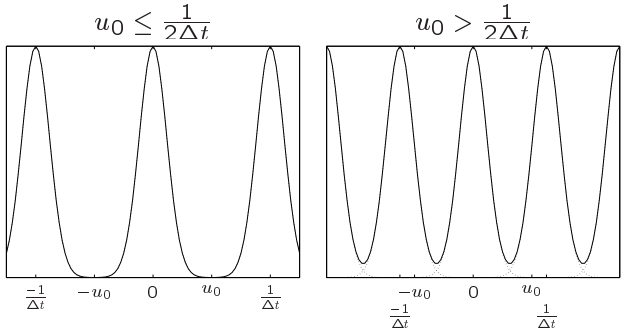
$$\begin{aligned} u_0 &\leq \frac{1}{\Delta t} - u_0 \\ 2u_0 &\leq \frac{1}{\Delta t} \\ u_0 &\leq \frac{1}{2\Delta t} \\ \Delta t &\leq \frac{1}{2u_0}. \end{aligned}$$

Vi måste alltså sampla med minst dubbelt så hög frekvens som u_0. Om vi samplar med frekvensen $\frac{1}{\Delta t}$ måste signalen vara bandbegränsad med $u_0 = \frac{1}{2\Delta t}$.

Detta kallas för *samplingsteoremet* och gränsfrekvensen $\frac{1}{2\Delta t}$ kallas för *vikningsfrekvensen* eller *Nyquist-frekvensen*.

Aliasing

Om signalen innehåller frekvenser över Nyquist-frekvensen $\frac{1}{2\Delta t}$ kommer energi att "vikas in" från intilliggande perioder i frekvensrummet. Detta kallas *aliasing*.



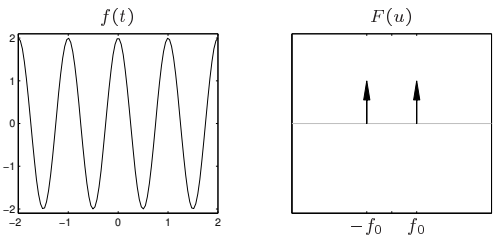
Samplingsexempel

Antag att vi har en signal

$$f(t) = 2\cos 2\pi f_0 t$$

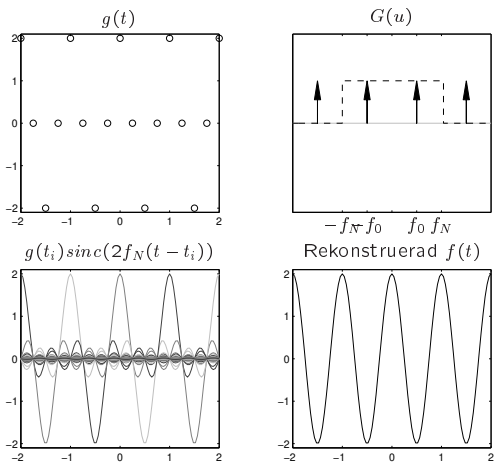
som har spektrat

$$F(u) = \delta(u + f_0) + \delta(u - f_0).$$



Översampling

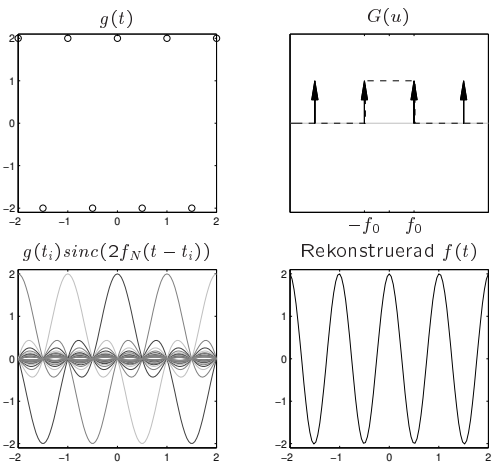
Om vi samplar signalen med samplingsavståndet $\Delta t = \frac{1}{4f_0}$ så får vi Nyquist-frekvensen $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = 2f_0$.



Vi kan återskapa signalen helt då $f_N \leq f_0$.

Kritisk sampling

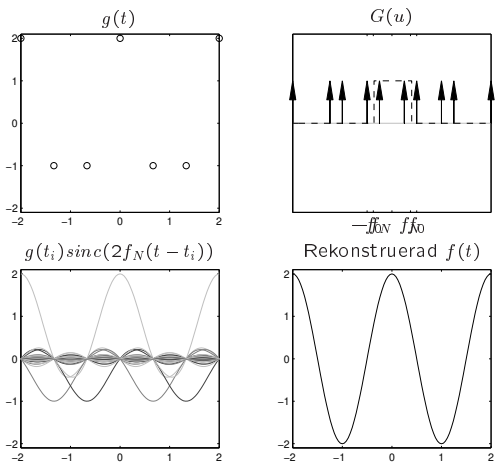
Om vi samplar signalen med samplingsavståndet $\Delta t = \frac{1}{2f_0}$ så får vi Nyquist-frekvensen $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = f_0$.



Vi kan återskapa signalen helt då $f_N \leq f_0$.

Undersampling

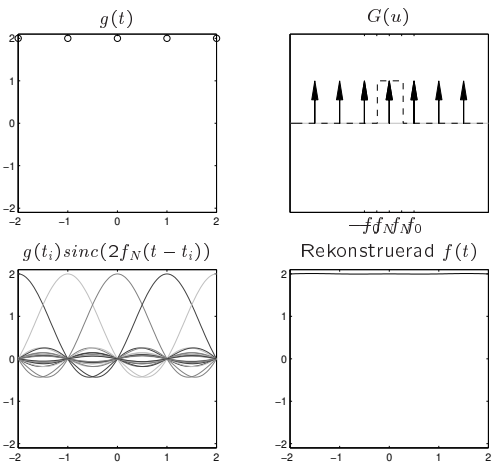
Om vi samplar signalen med samplingsavståndet $\Delta t = \frac{2}{3f_0}$ så får vi Nyquist-frekvensen $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{3}{4}f_0$.



Den rekonstruerade signalen har lägre frekvens än den urspungliga pga aliasing.

Kraftig undersampling

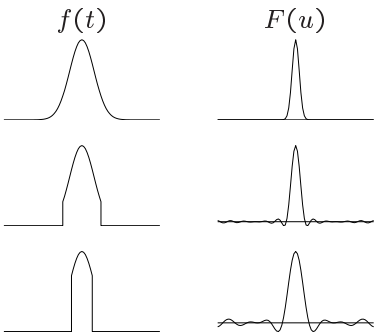
Om vi samplar signalen med samplingsavståndet $\Delta t = \frac{1}{f_0}$ så får vi Nyquist-frekvensen $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2}f_0$.



Den rekonstruerade signalen har ännu lägre frekvens än den urspungliga pga aliasing.

Trunkerad signal

En trunkerad signal kan ses som en produkt av den oändliga signalen $f(t)$ och en rektangelfunktion. Det innebär att i frekvensdomänen kommer $F(u)$ att faltas med $sinc$-funktionen.



Det innebär att ingen trunkerad signal är bandbegränsad. Alltså kommer alla diskreta signaler att påverkas av aliasing.

Vi kan dock reducera effekten genom att översampla.

Den diskreta fouriertransformen

Givet en kontinuerlig signal $f(t)$ samplad i ett antal punkter $f(t_0 + t\Delta t), t = 0, \ldots, N-1$, definierar vi den diskreta fouriertransformen

$$F(u) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-i2\pi ut/N}$$

och dess invers

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ut/N}$$

Sekvensen $F(u)$ är diskret och motsvarar en sampling av den kontinuerliga $F(u)$ för $u\Delta u, u = 0, 1, \ldots, N-1$. Samplingsavståndet Δt är relaterat till frekvensavståndet Δu enligt

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta t}.$$

$F(u)$ är periodisk med perioden N, $F(u) = F(u+N) = F(u-N)$.

$f(t)$ är periodisk med perioden N, $f(t) = f(t+N) = f(t-N)$.

Den diskreta fouriertransformen

Om f är en vektor som innehåller våra samples kan den diskreta fouriertransformen skrivas som

$$F = Cf,$$

där $C_{rc} = e^{-i2\pi(r-1)(c-1)/N}$. Den inversa diskreta fouriertransformen blir då

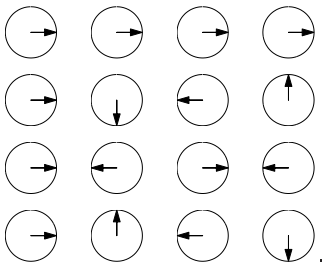
$$f = C^{-1}F = C^*F.$$

Den diskreta fouriertransformen

För $N = 4$ blir

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

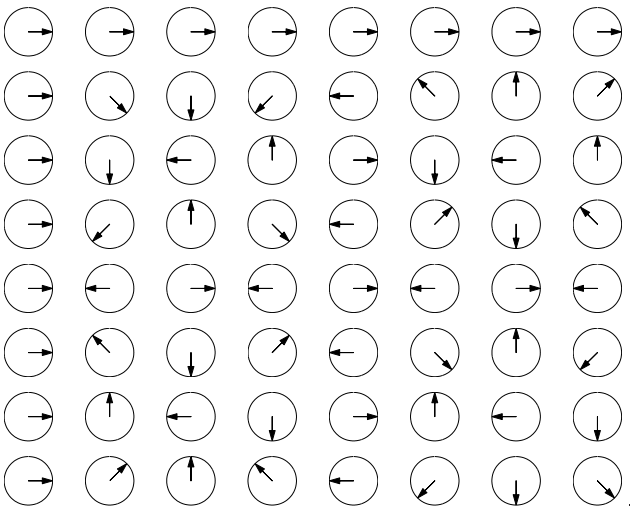
eller



Den diskreta fouriertransformen

För $N = 8$ blir $C =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-\sqrt{2}i & -i & -\sqrt{2}-\sqrt{2}i & -1 & -\sqrt{2}+\sqrt{2}i & i & \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -\sqrt{2}-\sqrt{2}i & i & \sqrt{2}-\sqrt{2}i & -1 & \sqrt{2}+\sqrt{2}i & -i & -\sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2}+\sqrt{2}i & -i & \sqrt{2}+\sqrt{2}i & -1 & \sqrt{2}-\sqrt{2}i & i & -\sqrt{2}-\sqrt{2}i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & \sqrt{2}+\sqrt{2}i & i & -\sqrt{2}+\sqrt{2}i & -1 & -\sqrt{2}-\sqrt{2}i & -i & \sqrt{2}-\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$



FFT

Den diskreta fouriertransformen $F = Cf$ har beräkningskomplexiteten $\mathcal{O}(N^2)$. Den snabba fouriertransformen (*Fast Fourier Transform*) utnyttjar strukturen i C-matrisen till att beräkna den diskreta fouriertransformen i $\mathcal{O}(N \log N)$ tid.

FFT är snabbast för $N = 2^k$ för k heltal.

Den tvädimensionella fouriertransformen

Givet en funktion $f : \Re^2 \to \mathcal{C}$ definieras den tvädimensionella Fouriertransformen som

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} = F(u,v) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(xu+yv)}dxdy.$$

och dess invers som

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i2\pi(xu+yv)}dudv.$$

Den tvädimensionella diskreta fouriertransformen

Givet en kontinuerlig signal $f(x,y)$ samplad i ett antal punkter $f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y), x = 0,\ldots,N-1, y = 0,\ldots,M-1$, definierar vi den diskreta fouriertransformen

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)e^{-i2\pi(ux/N+vy/M)}$$

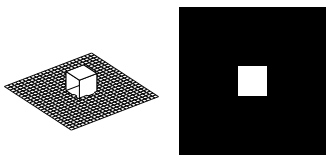
och dess invers

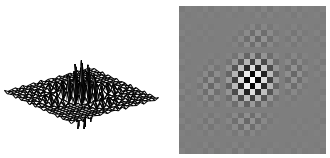
$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} F(u,v)e^{i2\pi(ux/N+vy/M)}$$

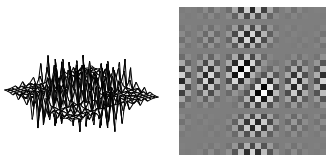
Signalen $F(u,v)$ är diskret och motsvarar en sampling av den kontinuerliga $F(u,v)$ för $u\Delta u, v\Delta v, u = 0,1,\ldots,N-1, v = 0,1,\ldots,M-1$. Samplingsavstånden $\Delta x, \Delta y$ är relaterade till frekvensavstånden $\Delta u, \Delta v$ enligt

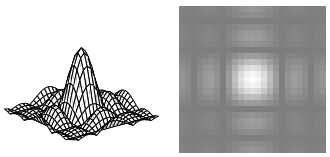
$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{1}{M\Delta y}.$$

Exempel

$f(x,y)$ 

$\Re(F(u,v))$ 

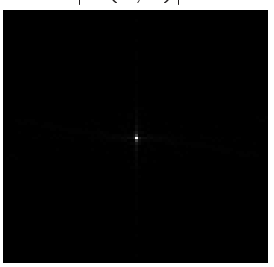
$\Im(F(u,v))$ 

$|F(u,v)|$ 

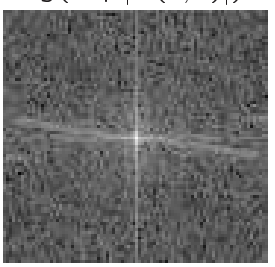
Exempel på verklig bild

Del av blomkruka

$|F(u,v)|$



$\log(1+|F(u,v)|)$



Filtrering i frekvensrummet

Om vi känner de önskade frekvensegenskaper hos en bild kan vi specifiera filtrets egenskaper i frekvensdomänen och utnyttja

$$g(x,y) = f(x,y) \star h(x,y)$$
$$\Updownarrow$$
$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v).$$

Filtreringen beräknas i följande steg:

$$F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\}$$
$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v)$$
$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(u,v)\}$$

Idealiska filter

Ett filter som låter de låga frekvenserna passera kallas *lågpassfilter*. På samma sätt finns *högpassfilter*, *bandpassfilter* (släpper igenom en viss frekvens) och *bandstoppfilter* (stoppar en viss frekvens).

Ett idealiskt lågpassfilter är

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \sqrt{u^2+v^2} \leq H_0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Ett idealiskt högpassfilter är

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \sqrt{u^2+v^2} \geq H_0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

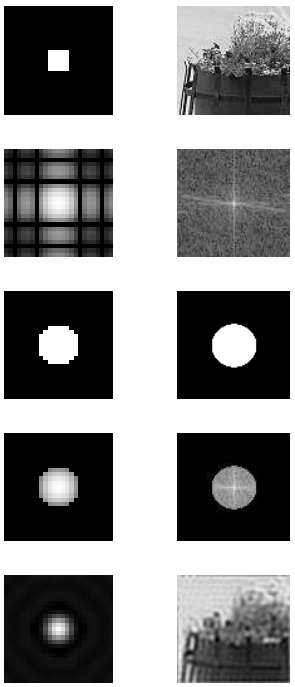
Ett idealiskt symmetriskt bandpassfilter är

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & H_0 \leq \sqrt{u^2+v^2} \leq H_0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

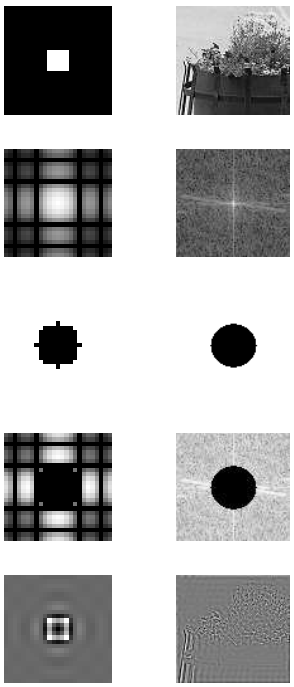
Ett idealiskt symmetriskt andstoppfilter är

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & H_0 \leq \sqrt{u^2+v^2} \leq H_0 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$$

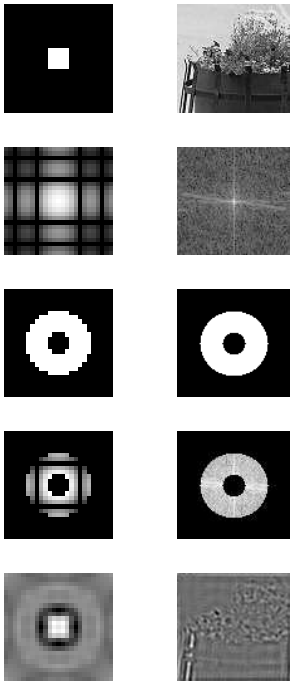
Filtrering med idealiskt lågpassfilter



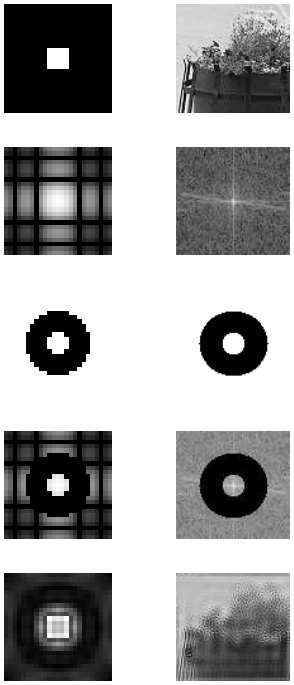
Filtrering med idealiskt högpassfilter



Filtrering med idealiskt bandpassfilter



Filtrering med idealiskt bandstoppfilter



Gaussiska filter

De skarpa kanterna i de idealiska filterna ger upphov till ringningar i rumsdomänen. Därför används hellre filter med mjukare övergång, t.ex. Gaussiska filter.

Ett Gaussiskt lägpassfilter är

$$H(u,v) = e^{-k(u^2+v^2)}$$

Ett Gaussiskt högpassfilter är

$$H(u,v) = 1 - e^{-k(u^2+v^2)}$$

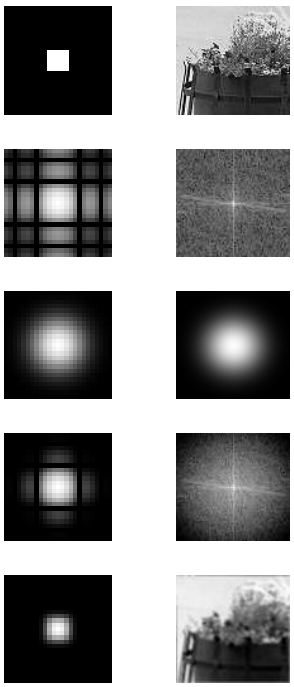
Ett Gaussisk centrerat bandpassfilter är

$$H(u,v) = e^{-k((u-u_0)^2+(v-v_0)^2)}$$

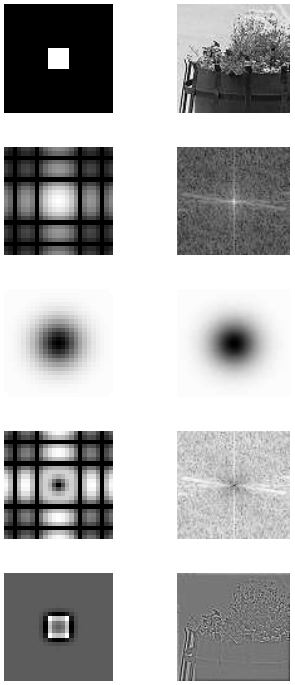
Ett Gaussisk centrerat bandstoppfilter är

$$H(u,v) = 1 - e^{-k((u-u_0)^2+(v-v_0)^2)}$$

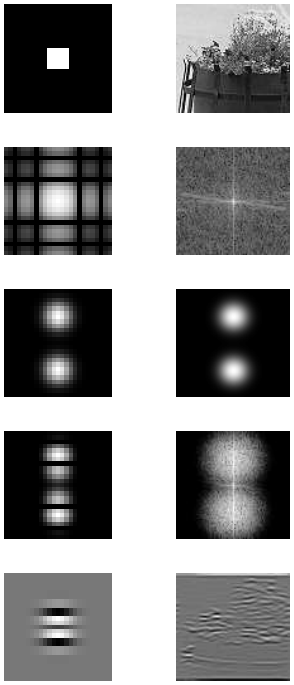
Filtrering med Gaussiskt lägpassfilter



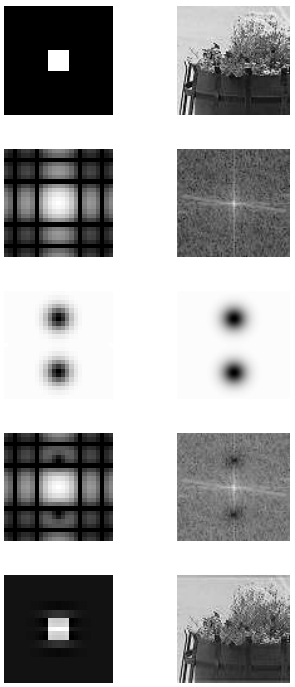
Filtrering med Gaussiskt högpassfilter



Filtrering med Gaussiskt bandpassfilter

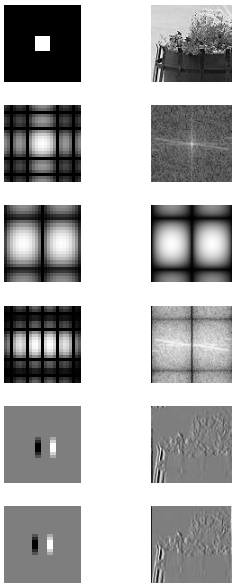


Filtrering med Gaussiskt bandstoppfilter



Filtrering i rumsdomänen

Filtrering kan också göras genom faltning i rumsdomänen.

Då använder man en filterkärna *kernel* som placeras över varje tänkbar position i bilden och beräknar den inre produkten.

Filtrering i rumsdomänen