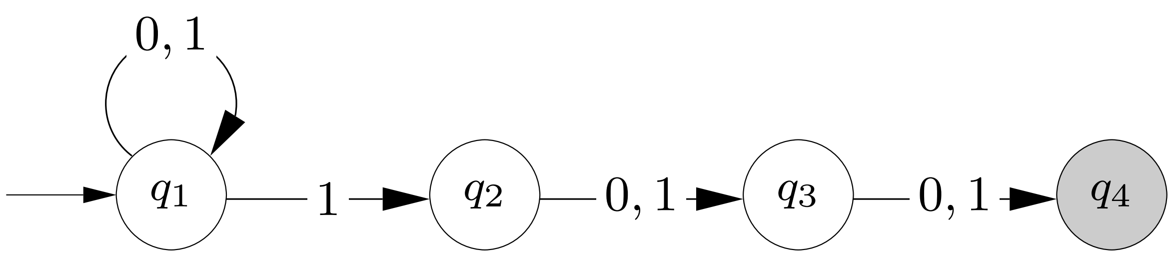
Determinism

- Om $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ är en ändlig automat så är δ en funktion.
- Det innebär att om man är i ett tillstånd q och läser symbolen a, så finns det exakt ett sätt att gå i automaten, nämligen till $\delta(q, a)$.
- På grund av detta ger vi den här typen av ändlig automat prefixet *deterministisk*.
- Vi ska nu titta på den mer generella automat som uppkommer när man tillåter *icke-determinism*; att det finns fler än en möjlig transition per input symbol.

Icke-determinism

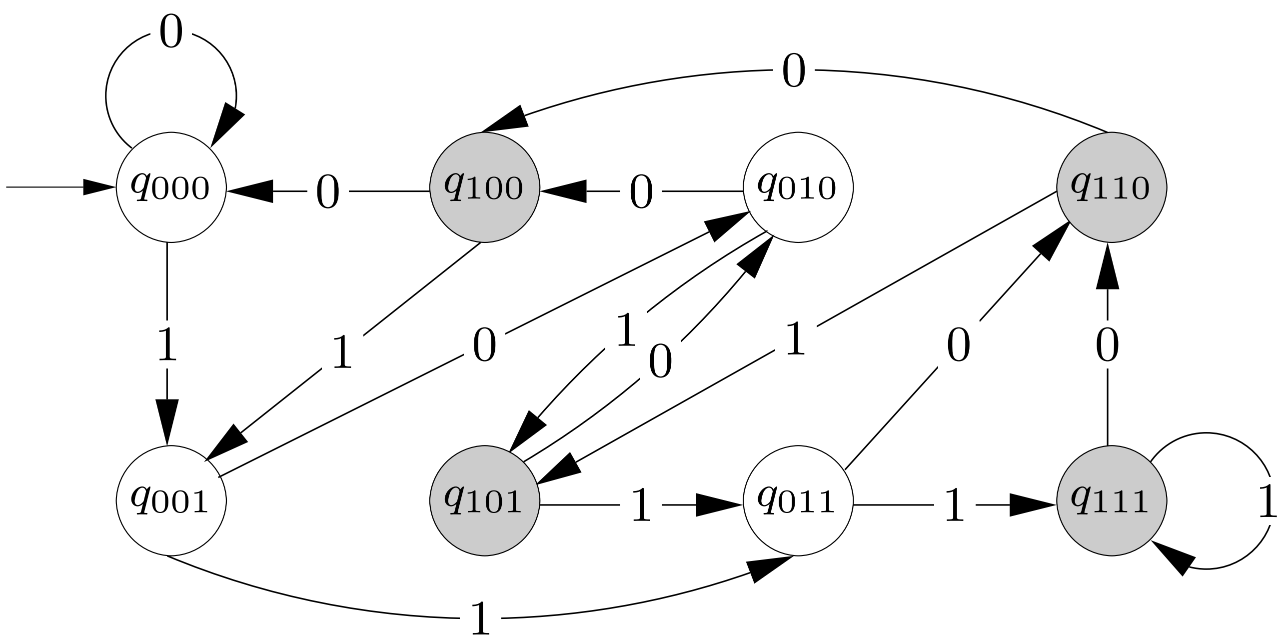
En icke-deterministisk automat M accepterar en sträng w om det finns något sätt att gå från starttillståndet så att man hamnar på ett accepterande tillstånd när hela w är läst.

Vilket språk accepterar då automaten nedan?



Determinsim eller icke-determinism?

För varje icke-deterministisk automat finns det en deterministisk automat som accepterar samma språk. Tyvärr har den i värsta fall $2^{|Q|}$ tillstånd ☹.



Den formella definitionen

En *icke-deterministisk ändlig automat* är ett system $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ där

- Q är en ändlig mängd tillstånd,
- Σ är ett alfabete,
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \mapsto \mathcal{P}(Q)$ är transitions*relationen*, där $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$.
- $q_0 \in Q$ är det initiala tillståndet, och
- $F \subseteq Q$ är mängden accepterande tillstånd.

Frågor om definitionen

Hur ser tillståndsdiagrammet för automaten $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{00}, F)$ där $Q = \{q_{00}, q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{21}, q_{22}\}$, $\Sigma = \{0\}$, δ ges av tabellen nedan och $F = \{q_{10}, q_{20}\}$? Vilket språk accepterar M?

	q_{00}	q_{10}	q_{11}	q_{20}	q_{21}	q_{22}
ϵ	$\{q_{10}, q_{20}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
0	$\emptyset$	$\{q_{11}\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_{21}\}$	$\{q_{22}\}$	$\{q_{20}\}$

Definition av acceptans

Låt $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ vara en icke-deterministisk ändlig automat, och låt w vara en sträng över alfabetet Σ. Vi säger att M accepterar w om vi kan skriva w som en sekvens $y_1 y_2 \cdots y_m$, så att varje y_i är en medlem i Σ_ϵ och det finns en sekvens tillstånd $r_0, r_1, \ldots, r_m$ i Q så att följande tre krav håller:

1. $r_0 = q_0$,
2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$, för $i = 0, \ldots, m-1$, och
3. $r_m \in F$.

Ekvivalensen mellan DFA och NFA

Teorem 1.39 Varje icke-deterministisk finit automat har en ekvivalent deterministisk finit automat.

Bevis Låt $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ vara en icke-deterministisk finit automat som accepterar språket A. Vi konstruerar den deterministiska finita automaten $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ som också accepterar A. För enkelhetens skull antar vi att N saknar ϵ transitioner.

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
- Σ är som i N.
- Låt $\delta'(R', a) = \{q \mid q \in \delta(r, a)$ för något $r \in R\}$, för alla $R' \in Q'$, $a \in \Sigma$.
- $q_0' = \{q_0\}$.
- $F' = \{R \in Q' \mid R$ contains an accept state of $N\}$.

ϵ-transitioner

- Hur hanterar vi nu ϵ-transitioner?
- Om $\delta(q, a)$ innehåller p, och $\delta(p, \epsilon)$ innehåller r, då kan vi lika gärna ändra δ så att $\delta(q, a)$ innehåller r direkt.
- Vi definierar funktionen E från $\mathcal{P}(Q)$ till $\mathcal{P}(Q)$ som

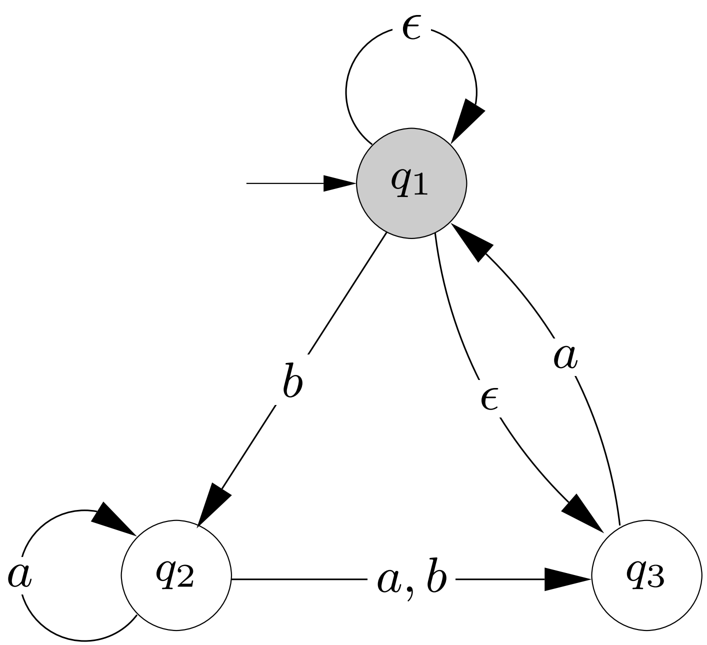
  $E(R) = \{q \mid q$ kan nås från R genom att gå längs 0 eller fler ϵ-transitioner$\}$.
- Vi byter ut definitionen av δ' mot

$$\delta'(R', a) = \{q \mid q \in E(\delta(r, a)) \text{ för något } r \in R'\}.$$

- och låter $q_0' = E(\{q_0\})$.

Exempel

Hur hittar vi en deterministisk automat som accepterar samma språk som den icke-deterministiska automaten nedan?



Mer om reguljära operationer

Klassen av reguljära språk är sluten under de reguljära operationerna union, konkatenation, och stjärna.

- Argumentet för att klassen är sluten under union har vi redan sett, men kan nu förenklas.
- För att få en automat som accepterar konkatenationen av två språk A och B kan vi koppla M_A's accepterande tillstånd till M_B's starttillstånd m.h.a. ϵ-transitioner.
- För att få en automat som accepterar stjärnan av språket A kan vi ge M_A ett nytt, accepterande, starttillstånd q_0 som vi kopplar till det gamla med en ϵ-transition, och sen koppla M_A's all accepterande tillstånd till q_0, också m.h.a. ϵ-transitioner.