Institutionen för datavetenskap
Umeå universitet

6 december 2011

Teknisk beräkningsvetenskap II 5DV123

Svar till tentamen

Tid: 9.00–13.00
Maximala antal poäng: 40. Betygsgränser: 18 (3), 25 (4), 32 (5)
Inga hjälpmedel.

1. Darcys lag för anisotropa porösa medier kan skrivas

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{K}\left(\nabla p - \rho g \boldsymbol{e}_g\right), \tag{1}$$

där $\boldsymbol{u}$ är Darcyhastigheten, p portrycket, μ och ρ fluidens viskositet respektive densitet, g gravitationskonstanten och $\boldsymbol{e}_g$ en enhetsvektor i gravitationens riktning. Mediets anisotropa permeabilitet representaras av den symmetriskt, positivt definitiva tensorn (3×3-matrisen) $\boldsymbol{K}$.

(a) Vad menas med permeabilitet och vad menas med att denna är isotrop respektive anisotrop? Vilken förenkling av sambandet (1) erhålls om permeabiliteten är isotrop? [2p]

(b) Trycknivån (*pressure head*) h i ett mättat poröst medium definieras som

$$h = \frac{p}{\rho g} + y, \tag{2}$$

där y är vertikalnivån ovan ett godtyckligt horisontalt koordinatplan. Under vissa antaganden gäller att trycknivån uppfyller ekvationen

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}\nabla h) = 0, \tag{3}$$

där $\boldsymbol{\kappa}$ är den hydrauliska konduktivitetstensorn (matris). Ange dessa antaganden och härled ekvation (3). [6p]

Svar:

(a) Permeabilitet = ett poröst mediums genomsläpplighet. En anisotrop permeabilitet innebär att det porösa materialet har olika genomsläpplighetsegenskaper i olika riktningar. Ett isotrop permeabilitet innebär samma genomsläpplighetsegenskaper i varje riktning. I det isotropa fallet kan permebilitetstensorn skrivas

$$\boldsymbol{K} = k\boldsymbol{I}, \tag{A1}$$

d.v.s. som en skalär permeabilitet k gånger identitetstensorn $\boldsymbol{I}$. Då blir Darcys lag

$$\boldsymbol{u} = -\frac{k}{\mu}\left(\nabla p - \rho g \boldsymbol{e}_g\right). \tag{A2}$$

(b) Det gäller att

$$\boldsymbol{e}_g = -\nabla y. \tag{A3}$$

Under antagandet att densiteten ρ är konstant tillsammans med sambandet (A3) kan Darcys lag (1) skrivas

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\rho g}{\mu}\boldsymbol{K}\nabla\left(\frac{p}{\rho g} + y\right). \tag{A4}$$

När densiteten är konstant ger masskonservering att $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, vilket tillsammans med uttrycket (A4) ger det önskade sambandet (3) med

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\rho g}{\mu}\boldsymbol{K}. \tag{A5}$$

2. Givet randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{i } (0,1),\\ u'(0) - au(0) &= g, \\ u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

där a och g är reella tal och f en funktion på intervallet $(0,1)$,

(a) härled en variationsform innehållande endast förstaderivator, specificera lämpligt energirum och definiera en finita-element-approximation baserad på kontinuerliga, styckvis linjära funktioner definierade på ett uniform diskretisering, samt [3p]

(b) specificera resulterande linjära ekvationssystem. [7p]

Svar:

(a) Välj en testfunktion v sådan att $v(1) = 0$ (där lösningen är känd), multiplicera ekvation (4) med v och integrera,

$$\begin{aligned} -\int_0^1 vu''\,dx = -vu'\Big|_0^1 + \int_0^1 v'u'\,dx &= [\text{randvillkoren i (4)}] \\ = v(0)(g + au(0)) + \int_0^1 v'u'\,dx &= \int_0^1 vf\,dx, \end{aligned} \tag{A6}$$

d.v.s.

$$\int_0^1 v'u'\,dx + av(0)u(0) = -v(0)g + \int_0^1 vf\,dx. \tag{A7}$$

Lämpligt energirum är

$$V = \left\{ v \mid \int v^2\,dx < +\infty, \quad v(1) = 0 \right\} \tag{A8}$$

och variationsproblemet blir att finna det $u \in V$ som uppfyller variationsformen (A7) för varje funktion $v \in V$.

För FE-diskretisering, dela upp intervallet $(0,1)$ i I intervall av längden Δx, där $x_i = i\Delta x$, $i = 0,\ldots, I$, är intervallens gränser. Definiera $V_h \subset V$ som rummet av all kontinuerliga funktioner som är linjära på varje intervall (x_i, x_{i+1}), $i = 0,\ldots, I-1$ samt lika med noll i punkten $x = 1$. Finita-element-approximationen blir då: finn $u_h \in V_h$ sådan

$$\int_0^1 v_h' u_h'\,dx + av_h(0)u_h(0) = -v_h(0)g + \int_0^1 v_h f\,dx \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{A9}$$

(b) Expandera finita-element-lösningen u_h i basen av "hattfunktioner" ϕ_j,

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{I-1} u_j \phi_j(x). \tag{A10}$$

(Obs att summan slutar vid $j = I-1$ för att randvillkoret $u_h(1) = 0$ alltid ska vara uppfyllt). Substituera (A10) i (A9) samt välj $v_h = \phi_i$, $i = 0,\ldots, I-1$. Då erhålls

$$\sum_{j=0}^{I-1} u_j \left(\int_0^1 \phi_i'\phi_j'\,dx + a\phi_i(0)\phi_j(0) \right) = -\phi_i(0)g + \int_0^1 \phi_i f\,dx \tag{A11}$$

för $i = 0,\ldots, I-1$. Basfunktionernas derivator uppfyller

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} 1/h & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ -1/h & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{i övrigt.} \end{cases} \tag{A12}$$

Dessutom gäller att

$$\phi_i(0) = \begin{cases} 1 & i = 0, \\ 0 & i \neq 0. \end{cases} \tag{A13}$$

Ekvation (A11) kan skrivas som ekvationssystemet $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, där matriselementen, med användning av uttrycken (A12) och (A13), kan beräknas till

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} 1 + a\Delta x & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{I-1})^T, \tag{A14}$$

$$b_0 = -g + \int_0^1 \phi_0 f\,dx, \qquad b_i = \int_0^1 \phi_i f\,dx \qquad \text{for } i = 1, \ldots, I-1.$$

Integralerna som innehåller f approximeras lämpligen med användning av kvadratur, t.ex. trapetsregeln:

$$\int_0^1 \phi_0 f\,dx = \int_0^{x_1} \phi_0 f\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\big(\phi_0(0)f(0) + \phi_0(x_1)f(x_1)\big) = \frac{\Delta x}{2} f(0), \tag{A15}$$

och för $i = 1, \ldots, I-1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_i f\,dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i f\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i f\,dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{2}\big(\phi_i(x_{i-1})f(x_{i-1}) + \phi_i(x_i)f(x_i)\big) \\ &\qquad + \frac{\Delta x}{2}\big(\phi_i(x_i)f(x_i) + \phi_i(x_{i+1})f(x_{i+1})\big) \\ &= \Delta x f(x_i). \end{aligned} \tag{A16}$$

3. Vågutbredning i en förlustfri transmissionsledning, t.e.x. en ideal koaxialkabel, kan modelleras med ekvationerna

$$\begin{aligned} C\frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial I}{\partial x}, \\ L\frac{\partial I}{\partial t} &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \end{aligned} \tag{5}$$

där $U(x,t)$ spänningen och $I(x,t)$ strömmen vid tiden t och positionen x längs kabeln och där C och L är kabelns kapacitans respektive induktans per meter.

(a) Skriv om ekvationerna (5) som ett system av konserveringslagar i formen $\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}))_x = \mathbf{0}$, där $\boldsymbol{u} = (U, I)$ och där fluxfunktionen ges av $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$. Bestäm 2×2-matrisen $\boldsymbol{A}$ och dess egenvärden. [3p]

(b) Skriv om ekvationerna (5) som en andra ordningens vågekvation $U_{tt} - c_0^2 U_{xx} = 0$ och bestäm transmissionshastigheten c_0. [2p]

(c) Skriv om ekvationerna (5) i *karakteristisk form*, d.v.s. som ett system av okopplade ekvationer av formen

$$\begin{aligned} V_t^+ + aV_x^+ &= 0, \\ V_t^- - aV_x^- &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Bestäm transporthastigheten a samt de karakteristiska variablerna V^+ och V^- som linjärkombinationer av U och I. Tolka lösningen till ekvationerna (6) fysikaliskt. [5p]

Svar:

(a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ 1/L & 0 \end{pmatrix} \tag{A17}$$

Egenvärdena λ uppfyller

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1/C \\ -1/L & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{LC} = 0, \tag{A18}$$

d.v.s. $\lambda = \pm 1/\sqrt{LC}$.

(b) Derivera första raden i ekvation (5) med t och andra raden med x,

$$\begin{aligned} C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}, \\ L\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{A19}$$

Reducering av den blandade derivatan ger

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \tag{A20}$$

och att $c_0 = \pm 1/\sqrt{LC}$.

(c) En allmän linjär ansats är $V^+ = b_1 U + b_2 I$. Eftersom varje V^+ som löser ekvation (6) kan skalas godtyckligt räcker det med en obekant och vi ansätter därför $V^+ = U + Z_0 I$. Insättning av ansatsen i första raden av ekvation (6) ger

$$\begin{aligned} U_t + Z_0 I_t + aU_x + aZ_0 I_x &= \frac{1}{C}\left(CU_t + CaZ_0 I_x\right) + \frac{Z_0}{L}\left(LI_t + \frac{La}{Z_0}U_x\right) \\ \left[\text{subst. ekv. (5)}\right] &= \frac{1}{C}\left(-I_x + CaZ_0 I_x\right) + \frac{Z_0}{L}\left(-U_x + \frac{La}{Z_0}U_x\right) = 0, \end{aligned} \tag{A21}$$

d.v.s.

$$CaZ_0 = 1, \qquad \frac{La}{Z_0} = 1, \tag{A22}$$

från vilken vi kan lösa ut $Z_0 = \sqrt{L/C}$ och $a = 1/\sqrt{LC}$. Uttrycket för V^- erhålls på analogt sätt. Sammanfattningsvis får vi

$$\begin{aligned} V^+ &= U + Z_0 I, \qquad & V^- &= U - Z_0 I, \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad & a &= \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{aligned} \tag{A23}$$

De karaktäristiska variablerna V^+ och V^- motsvarar fysikaliskt signaler som transporteras i positiv respektive negativ koordinatriktning längs kabeln.

Anmärkning. Z_0 kallas för transmissionskabelns *karakteristiska impedans.*

4. (a) Visa att för den skalära konserveringslagen i en dimension,

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{7}$$

definierad i x-intervallet $(0,1)$ och i tidsintervallet $(0,T)$ gäller

$$\int_0^1 u(x,T)\,dx = \int_0^1 u(x,0)\,dx + \int_0^T f(u(0,t))\,dt - \int_0^T f(u(1,t))\,dt. \tag{8}$$

Ge också en fysikalisk tolkning till uttrycket (8). [2p]

(b) En allmän, explicit finita-volyms-approximering av ekvation (7) kan skrivas

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{F_{i+1/2}^n-F_{i-1/2}^n}{\Delta x}=0, \tag{9}$$

där intervallet $(0,1)$ på vanligt sätt delats in i I delintervall och tidsintervallet $(0,T)$ i N delintervall. Visa att schemat (9) uppfyller en diskret motsvarighet till uttrycket (8) med summor över i och n i stället för integraler. [4p]

(c) Antag att lösningen till integralformen av ekvation (7) är glatt överallt i rum och tid (d.v.s. åtminstone kontinuerligt differentierbar i x och t) förutom längs kurvan $(p(t),t)$ i (x,t)-planet samt att lösningen uppvisar en hoppdiskontinuitet (en *stöt*) vid kurvan $(p(t),t)$. Vi använder beteckningen u^- för vänstergränsvärdet av $u(x,t)$ när $x\to p(t)$ från vänster och u^+ för motsvarande högergränsvärde. Visa att stöthastigheten $\dot p(t)$ uppfyller det s.k. *Rankine–Hugoniot*-villkoret [6p]

$$\dot p(t)(u^+-u^-)=f(u^+)-f(u^-). \tag{10}$$

Ledning. Ansätt ett integrationsintervall (a,b) i integralformen av ekvation (7) så att $p(t)\in(a,b)$ och dela upp integrationsintervallet i delintervallen $(a,p(t))$ och $(p(t),b)$. Ett användbart samband i detta fall är också följande produktregel:

$$\frac{d}{dt}\int_a^{g(t)} f(x,t)\,dx = f(g(t),t)\frac{dg}{dt}+\int_a^{g(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx. \tag{11}$$

Svar:

(a) Uttrycket (8) följer efter integrering av (7) i rum och tid. Tolkning: antag att u avser mängd (t.ex. massa) per längdenhet av någon substans. Då säger uttrycket (8) att mängden av substansen vid tidpunkten T är lika med mängden vid tidpunkten 0 plus det som sammanlagt strömmat in vid $x=0$ minus det som sammanlagt strömmat ut vid $x=1$ under tiden $(0,T)$.

(b) Multiplicering av ekvation (9) med $\Delta x/\Delta t$ och summering över i och n ger att

$$\Delta x\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{I}\left(u_i^{n+1}-u_i^n\right)+\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{I}\left(F_{i+1/2}^n-F_{i-1/2}^n\right)=0. \tag{A24}$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\left(u_i^{n+1}-u_i^n\right)&=u_i^1-u_i^0+u_i^2-u_i^1+\cdots+u_i^N-u_i^{N-1}\\&=u_i^N-u_i^0,\\ \sum_{i=1}^{I}\left(F_{i+1/2}^n-F_{i-1/2}^n\right)&=F_{3/2}^n-F_{1/2}^n+F_{5/2}^n-F_{3/2}^n+\cdots+F_{I+1/2}^n-F_{I-1/2}^n\\&=F_{I+1/2}^n-F_{1/2}^n.\end{aligned} \tag{A25}$$

Substituering av uttrycken (A25) i ekvation (A24) ger att

$$\Delta x\sum_{i=1}^{I}\left(u_i^N-u_i^0\right)+\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\left(F_{I+1/2}^n-F_{1/2}^n\right)=0, \tag{A26}$$

som också kan skrivas

$$\Delta x\sum_{i=1}^{I}u_i^N=\Delta x\sum_{i=1}^{I}u_i^0+\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}F_{1/2}^n-\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}F_{I+1/2}^n, \tag{A27}$$

vilket är en direkt diskret motsvarighet till uttrycket (8).

(c) Enligt ledning utgår vi från integralformen

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u\,dx + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) = 0, \tag{A28}$$

delar upp integrationsintervallet och erhåller

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{p(t)} u\,dx + \int_{p(t)}^b u\,dx\right) + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) = 0, \tag{A29}$$

vilket efter användning av produktregeln (11) kan skrivas

$$u^-\,\dot{p}(t) - u^+\,\dot{p}(t) + \int_a^{p(t)} u_t\,dx + \int_{p(t)}^b u_t\,dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)). \tag{A30}$$

Det finns åtminstone två sätt att gå vidare från detta uttryck.

Alternativ 1. Låt $a \to p(t)$ och $b \to p(t)$. Då gäller att $u(a,t) \to u^-$, $u(b,t) \to u^+$, $\int_a^{p(t)} u_t\,dx \to 0$, $\int_{p(t)}^b u_t\,dx \to 0$ (eftersom u_t är en snäll (glatt) funktion utanför $(p(t),t)$) och uttrycket (A30) blir således det önskade

$$(u^- - u^+)\dot{p}(t) = f(u^-) - f(u^+). \qquad \square \tag{A31}$$

Alternativ 2. Skriv högerledet i ekvation (A30) som

$$\begin{aligned} &f(u(a,t)) - f(u(b,t)) \\ &\qquad = f(u(a,t)) - f(u^-) - f(u(b,t) + f(u^+) + f(u^-) - f(u^+) \\ &\qquad = -\int_a^{p(t)} f(u)_x\,dx - \int_{p(t)}^b f(u)_x\,dx + f(u^-) - f(u^+), \end{aligned} \tag{A32}$$

där vi i sista ledet använt integralkalkylens huvudsats, som är tillämpbar p.g.a. att lösningen är glatt i intervallen $(a, p(t))$ respektive $(p(t), b)$. Substituering av uttrycket (A32) i ekvation (A30) ger att

$$\begin{aligned} &u^-\,\dot{p}(t) - u^+\,\dot{p}(t) + \int_a^{p(t)} \big(u_t + f(u)_x\big)\,dx + \int_{p(t)}^b (u_t + f(u)_x)\,dx. \\ &\qquad = f(u^-) - f(u^+). \end{aligned} \tag{A33}$$

Eftersom lösningen u är glatt i intervallen $(a, p(t))$ och $(p(t), b)$ uppfyller den differentialformuleringen av konserveringslagen, $u_t + f(u)_x = 0$, i dessa intervall och ekvation (A33) reduceras därför till Rankine–Hugoniot-villkoret (10). $\square$

Anmärkning. Lösningen i alternativ 1 var det jag tänkte på när problemet formulerades. Två studenter lyckades dock *nästan* att genomföra ett bevis enligt alternativ 2…