Institutionen för datavetenskap
Umeå universitet

26 november 2010
Numeriska metoder för civilingenjörer

Lösningsskiss, Dugga tema 1–3

1. Vad kan det medföra för problem med att använda testet

```
if x==y ...
```

i ett Matlabprogram om `x` och `y` är flyttal? Föreslå ett alternativt, bättre test!

Svar: Om `x` och `y` är resultatet av flyttalsberäkningar kan avrundningsfel göra att testet indikerar falskt trots att `x` skulle vara exakt lika med `y` vid en beräkning utan avrundningsfel. Lämpligare är därför att testa

```
if abs(x-y) <= tol
```

där `tol` är ett litet tal.

2. I de allra flesta fall är avrundningsfelen i numeriska beräkningar av underordnad betydelse, särskilt i jämförelse med andra fel som kan uppstå, t.ex. modellerings- och diskretiseringsfel. Två undantag till det påståendet är *känsliga problem* och *numeriskt instabila algoritmer*. Nämn ett exempel på ett känsligt problem och ett exempel på en numeriskt instabil algoritm för vilka avrundningsfel kan bli märkbara.

Svar: Exempel på känsliga problem:: linjärt system av ekvationer där matrisen har högt konditionstal; alt. banor för kaotiska dynamiska system. Exempel på en numeriskt instabil algorithm: Gausselimination utan radpivotering.

3. Antag att en numerisk beräkning genererar vektorn $(2.7, 4.4)$ som resultat. Man råkar veta att i detta fall skulle det exakta svaret varit vektorn $(3, 4)$ och vi vill beräkna hur stort fel vi gjort i beräkningen. Bestäm (a) absolut fel i 2-normen, (b) absolut fel i max-normen, (c) relativt fel i 2-normen och (d) relativt fel i max-normen.

Svar: $x = (2.7, 4.4)$, $\hat{x} = (3, 4)$; $x - \hat{x} = (-0.3, 0.4)$.

(a) $\|x-\hat{x}\|_2 = (0.3^2 + 0.4^2)^{1/2} = 0.5$

(b) $\|x-\hat{x}\|_\infty = \max(0.3, 0.4) = 0.4$

(c) $\dfrac{\|x-\hat{x}\|_2}{\|x\|_2} = \dfrac{0.5}{(3^2+4^2)^{1/2}} = 0.1$

(d) $\dfrac{\|x-\hat{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \dfrac{0.4}{\max(3,4)} = 0.1$

4. Vad menas med att en iterativ metod för lösning av ett system av ekvationer har linjär konvergenshastighet?

Svar: Låt x^* vara den exakta lösningen till problemet och $x_0, x_1, \ldots$ sekvensen som genereras av den iterativa metoden. Definiera $e_k = x_k - x^*$. Att metoden har linjär konvergenshastighet innebär att det finns en konstant $0 \le C < 1$ sådan att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} = C$$

5. LU-faktorisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1/2 \quad 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3/2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \quad 1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2/3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11/3 \end{pmatrix}$$

Vilket ger att

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11/3 \end{pmatrix}$$

6. Beräkna normerna $\|A\|_1$ och $\|A\|_\infty$ för matrisen A ovan samt beskriv hur normen $\|A\|_2$ kan beräknas.

Svar: Normen $\|A\|_1$ för matrisen A är den största 1-normen hos kolonnerna, i vårt fall är $\|A\|_1 = \max\{5,6,8,6\} = 8$. Den största 1-normen hos raderna ger ∞–normen för matrisen A är, i vårt fall är $\|A\|_\infty = \max\{5,6,7,7\} = 7$. Slutligen, 2-normen är kvadratroten av det största egenvärdet till $A^\top A$.

7. Vi studerar en pendel som svänger med period 2π. Positionen av pendeln vid tiden t ges av $y(t) = \mathrm{e}^{a_1 t}\sin(a_2 + t)$, där a_1, och a_2 är reella konstanter. Antag att vi har följande mättdata

$$t_1 = 0.2, \quad y_1 = 0.65, \quad t_2 = 0.4, \quad \text{och} \quad y_2 = 0.90.$$

Sätt upp problemet att bestämma de okända konstanterna a_1 och a_2 som ett system på formen $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, där $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^\top$, samt beräkna Jakobianmatrisen av $\mathbf{f}$.

Svar: Problemet som vi vill lösa är

$$\mathrm{e}^{a_1 t_1}\sin(a_2 + t_1) - y_1 = 0,$$
$$\mathrm{e}^{a_1 t_2}\sin(a_2 + t_2) - y_2 = 0,$$

Ovanstående system är på formen $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$, där

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_1 t_1}\sin(a_2 t_1) - y_1 \\ \mathrm{e}^{a_1 t_2}\sin(a_2 t_2) - y_2 \end{pmatrix}.$$

Jacobianen av $\mathbf{f}$ ges av

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \mathrm{e}^{a_1 t_1}\sin(a_2 + t_2) & \mathrm{e}^{a_1 t_1}\cos(a_2 + t_1) \\ t_2 \mathrm{e}^{a_1 t_2}\sin(a_2 + t_2) & \mathrm{e}^{a_1 t_2}\cos(a_2 + t_2) \end{pmatrix}$$