Institutionen för datavetenskap
Umeå universitet

21 december 2009

Numeriska metoder för civilingenjörer 5DV040
Teknisk-vetenskapliga beräkningar 5DV005

Tentamen

Tid: 9.00–13.00
Maximala antal poäng: 100. Gräns för godkänt: ungefär hälften av maxpoängen
Inga hjälpmedel.

1. ***Detta problem skall endast göras av dem som ej gjort eller ej är godkända på duggan!***

(a) Sant eller falskt: maskinepsilon ϵ_M är det minsta tal till beloppet som en dator kan lagra. [1p]

(b) Sant eller falskt: avståndet mellan två efter varandra följande flyttal blir mindre ju mindre flyttalet är till beloppet. [1p]

(c) Vilka problem kan uppstå när man numeriskt löser linjära ekvationssystem med illakonditionerade matriser? Varför används radpivotering i datorimplementationer av LU-faktorisering? Behövs radpivotering om matrisen är välkonditionerad? [2p]

(d) LU-faktorisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3p]

(e) Antag att LU-faktorerna till en matris A är kända. Hur kan denna information användas till att beräkna matrisinversen A^{-1}? [3p]

---

2. Studera följande linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Sätt upp systemet på formen $Ax = b$, samt beräkna 1-norm och ∞-norm för A. [4p]

(b) Antag nu att vi inför en störning i högerledet så att vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 4 \\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2 = \delta \end{cases}$$

Beräkna det relativa felet i högerledet för det störda fallet. Använd de tre normerna: 1-norm, 2-norm samt ∞-norm för att beräkna storleken av detta fel. [4p]

(c) Beräkna systemets konditionstal baserat på ∞-norm. [8p]

(d) Antag nu att man inte vet exakt hur högerleden ser ut men att man vet att det relativa felet i högerledet är ε. Bestäm i detta fall en övre gräns för vad det relativa felet i x kan bli. [8p]

(e) Beräkna det exakta relativa felet i x när högerledet störs som i (b) och jämför med den övre gräns du beräknat i (d). [6p]

(fortsätter på baksidan)

3. (a) För vilka typer av begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer kan det vara en väsentlig fördel ur effektivitetssynpunkt att använda implicita, i motsats till explicita, numeriska metoder? Motivera. [5p]

(b) Om komponenterna $r_1(t)$, $r_2(t)$ av avståndsvektorn mellan två punktmassor m_1, m_2 endast påverkas av krafter från ömsesidig gravitation uppfyller dessa rörelseekvationerna

$$r_1'' = -\frac{r_1}{(r_2 - r_1)^3} G(m_2 + m_1),$$
$$r_2'' = -\frac{r_2}{(r_2 - r_1)^3} G(m_2 + m_1).$$

Skriv om systemet på standardform för begynnelsevärdesproblem. [5p]

(c) Begynnelsevärdesproblemet för $y' = f(t, y)$ kan lösas numeriskt med trapetsmetoden

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{2}\big(f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)\big).$$

(i) Är metoden explicit eller implicit? [2p]

(ii) Härled metodens noggrannhetsordning. [8p]

(iii) Bestäm metodens stabilitetsvillkor på negativa reella axeln, d.v.s. villkoret för stabilitet när schemat tillämpas på problemet $y' = \lambda y$ för $\lambda < 0$. [10p]

4. (a) Radien r hos ett cylindersymmetriskt föremål har uppmätts vid 15 ekvidistanta punkter längs symmetriaxeln z. Ange en lämplig metod att interpolera punkterna i avsikt att plotta konturen (axiellt tvärsnitt) av föremålet. [2p]

(b) En numerisk metod genererar talföljden

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right),$$

där $a > 0$. Antag att talföljen konvergerar.

(i) Till vilket tal konvergerar talföljden?

(ii) Visa att konvergenshastigheten är kvadratisk. [8p]

(c) Givet den generella kvadraturformeln

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha_1 f(-1) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(1),$$

härled villkor på konstanterna α_1, α_2 och α_3 så att formeln är exakt för alla

(i) konstanta funktioner f,

(ii) linjära polynom f,

(iii) kvadratiska polynom f.

Vilket är den högsta polynomgrad som kan integreras exakt när man använder konstanterna härledda i (iii)? [10p]

(d) Talföljen $x_k = (k+1)/k$ konvergerar (långsamt!) till 1. Visa att konvergenshastigheten *inte* är linjär. [10p]

Lycka till!

Martin Berggren, Fotios Kasolis & Eddie Wadbro