Institutionen för datavetenskap
Umeå universitet

21 december 2009

Numeriska metoder för civilingenjörer 5DV040
Teknisk-vetenskapliga beräkningar 5DV005

Lösningar till tentamen

1. (a) Falskt.

   (b) Sant.

   (c) Fel i indata (t.ex. avrundningsfel) kan påverka lösningen mycket om matrisen är illakonditionerad. LU-faktorisering utan radpivotering är numeriskt instabil, d.v.s. det kan uppstå stor tillväxt av avrundningsfel även när en välkonditionerad matris faktoriseras. Således är radpivotering nödvändig även för välkonditionerade matriser.

   (d)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^{-1}/_3 \quad {}^{-2}/_3 \quad {}^{-2}/_3 \\ \hookleftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ {}^{-1} \quad {}^{-2}/_3 \\ \hookleftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{-5}/_3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {}^{5}/_3 \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$$

   Koefficienterna i de elementära radoperationerna ovan ger elementen i L-matrisen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (e) Beräkningen av inversa matrisen är ett problem där man löser ett linjärt ekvationssystem med flera högerled. Det gäller att $AA^{-1} = I$; d.v.s. om kolonn k i matrisen A^{-1} betecknas med x_k gäller det att $Ax_k = e_k$, där e_k är kolonn k i identitetsmatrisen. Eftersom vi är givna $A = LU$ kan vi$n$, beräkna A^{-1} kolonn för kolonn genom den upprepade framåt- och bakåtsubstitutionen

$$Ld_k = e_k,$$
$$Ux_k = d_k,$$

   för alla kolonner k i matrisen.

2. (a) $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1, \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

   $\|A\|_1 = \max \left\| \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\|_1, \left\| \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\|_1 = 2$, $\|A\|_\infty = \max(\|(1,1)\|_1, \|(1,-1)\|_1) = 2$

   (b) I vårt fall gäller

$$b - \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix},$$

$$\|b - \hat{b}\|_1 = \|b - \hat{b}\|_2 = \|b - \hat{b}\|_\infty = \delta,$$

samt $b = (4 \quad 0)$; $\|b\|_1 = \|b\|_2 = \|b\|_\infty = 4$. Således är relativa felet i högerledet

$$\frac{\|\hat{b} - b\|}{\|b\|} = \frac{\delta}{4}$$

i alla vektornormerna.

(c) Det gäller att

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A,$$

och således $\kappa_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = (1/2)\|A\|_\infty \|A\|_\infty =$ [från (a)] $= 2$.

(d) För ekvationssystemen $Ax = b$, $A\hat{x} = \hat{b}$ gäller att

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\frac{\|b - \hat{b}\|}{\|b\|} = 2\varepsilon.$$

(e) Det relativa störningen av högerledet i (b) är $\delta/4$. Från (d) får vi att

$$\frac{\|x - \hat{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 2\varepsilon = 2\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}$$

Lösningarna till ekvationssystemen är $x = (2,2)^T$, $\hat{x} = (2 + \delta/2, 2 - \delta/2)$; vi får då $x - \hat{x} = (-\delta/2, \delta/2)^T$ och relativa felet blir

$$\frac{\|x - \hat{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\delta}{4},$$

vilket är mindre än begränsningen ovan.

3. (a) Implicita metoder är ofta effektivare än explicita metoder för *styva* problem, d.v.s. problem med mycket olika tidsskalor. Explicita metoders stabilitetsgräns styrs av de snabbaste tidsskalorna, så explicita metoder kräver ett stort antal tidssteg för att kunna lösa upp de långsamma tidsskalorna. På grund av möjligheten att använda mycket större tidssteg lönar det sig därför ofta ur effektivitetssynpunkt att använda implicita metoder, trots det extra arbete som behövs varje tidssteg för ekvationslösning.

(b) Definiera $p_1 = r_1'$, $p_2 = r_2$. Då gäller

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{(r_2 - r_1)^3} G(m_1 + m_2) \\ -\frac{r_2}{(r_2 - r_1)^3} G(m_1 + m_2) \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

(c) (i) Implicit.

(ii) Substituera exakta lösningen till $y' = f(t, y)$ i punkterna t_k, t_{k+1} in i schemat och beräkna vänsterled−högerled:

$$\begin{aligned}
&y(t_{k+1}) - y(t_k) - \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) + f(t_k, y(t_k))\right] \\
&\quad = y(t_{k+1}) - y(t_k) - \frac{\Delta t}{2}\left[y'(t_{k+1}) + y'(t_k)\right] = \text{[Taylorutveckling]} \\
&\quad = y(t_k) + y'(t_k)\Delta t + y''(t_k)\frac{\Delta t^2}{2} + y'''(t_k)\frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4) - y(t_k) \\
&\qquad - \frac{\Delta t}{2}\left[y'(t_k) + y''(t_k)\Delta t + y'''(t_k)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) + y'(t_k)\right] \\
&\quad = y'''(t_k)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) = -\frac{1}{12}y'''(t_k) + O(\Delta t^4).
\end{aligned}$$

så schemats noggrannhetsordning är 2.

(iii) Appliceras schemat på modellekvationen får vi

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{2}\left(\lambda y_{k+1} + \lambda y_k\right),$$

d.v.s.,

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\lambda\right) y_{k+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\lambda\right) y_k.$$

För stabilitet behövs $|y_{k+1}| \le |y_k|$, vilket gäller om och endast om

$$\frac{\left|1 + \frac{\Delta t}{2}\lambda\right|}{\left|1 - \frac{\Delta t}{2}\lambda\right|} \le 1.$$

För $\lambda < 0$ gäller att nämnaren är strikt större än täljaren för alla tidssteg $\Delta t > 0$. Schemat är därför ovillkorligt stabilt.

4. (a) Talföljden är

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \tag{1}$$

(i) Om $x_k \to x_*$ gäller att

$$x_* = \frac{1}{2}\left(x_* + \frac{a}{x_*}\right),$$

d.v.s. $x_*^2 = a$, så $x_* = \pm\sqrt{a}$. (Vilket värde det blir beror på startgissningen).

(ii) Subtrahera $\pm\sqrt{a}$ från vardera sidan av uttrycket (1),

$$\begin{aligned} x_{k+1} \pm \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \pm \sqrt{a} = \frac{x_k^2 + a \pm 2x_k\sqrt{a}}{2x_k} \\ &= \frac{(x_k \pm \sqrt{a})^2}{2x_k}, \end{aligned}$$

varav följer att konvergenshastigheten är kvadratisk i bägge fall.

(b) (i) Ansätts $f(x) = a$ får vi

$$\int_{-1}^{1} a\,\mathrm{d}x = 2a = a(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

vilket ger villkoret

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \tag{2}$$

för att formeln skall vara exakt för alla konstanta funktioner.

(ii) Ansätts $f(x) = bx$ får vi (obs att f är en udda funktion!)

$$\int_{-1}^{1} bx\,\mathrm{d}x = 0 = b(-\alpha_1 + \alpha_3),$$

vilket ger villkoret

$$\alpha_1 = \alpha_3. \tag{3}$$

Formeln är exakt för alla linjära funktioner $f(x) = a + bx$ om villkoren (2) och (3) bägge är uppfyllda.

(iii) Ansätts $f(x) = cx^2$ får vi

$$\int_{-1}^{1} cx^2 \,\mathrm{d}x = c\frac{2}{3} = c(\alpha_1 + \alpha_3),$$

d.v.s.

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \frac{2}{3} \tag{4}$$

Formeln är exakt för alla kvadratiska funktioner $f(x) = a + bx + cx^2$ om villkoren (2), (3) och (4) alla är uppfyllda. Tillsammans ger dessa villkor att

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{4}{3},$$

(vilket är Simpsons formel). Den högsta polynomgrad som kan integreras exakt är kubiska polynom eftersom kvadratiska polynom integreras exakt och eftersom

$$d\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = 0 = d(-1 + 4\cdot 0 + 1)/3 = 0,$$
$$e\int_{-1}^{1} x^4 \,\mathrm{d}x = e\frac{2}{5} \neq e(1 + 4\cdot 0 + 1)/3 = e\frac{2}{3}.$$

(c) En talföljd x_k konvergerar linjärt till x_* om det finns ett $C < 1$ sådan att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = C.$$

För denna talföljd gäller

$$x_k = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}, \quad x_{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1},$$

och således

$$x_{k+1} - 1 = \frac{1}{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)\frac{1}{k} = C_k\,(x_k - 1)\,,$$

där $C_k = k/(k+1)$, vilket ger att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = \lim_{k\to\infty} C_k = 1,$$

vilket visar konvergenshastigheten inte är linjär.