Begynnelsevärdesproblem, standardform

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t) \quad t > 0 \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0 \end{aligned} \tag{SF}$$

Exempel 3 förra föreläsningen (“harar och rävar”):

$$\begin{pmatrix} h' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1 - h/M) - d_1 r & 0 \\ 0 & -c_2 + d_2 h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ r \end{pmatrix}$$

är av form (SF) med

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ r \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} c_1(1 - h/M) - d_1 r & 0 \\ 0 & -c_2 + d_2 h \end{pmatrix}$$

Begynnelsevärdesproblem, standardform

ODE:r som innehåller derivator av högre ordning kan ofta överföras till (SF) med hjälp av extra obekanta.
Exempel 5 förra föreläsningen (Newtons 2:a lag):

$$\begin{aligned} m x'' &= f(x, x') \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Med $p = mx'$ (rörelsemängden) som extra variabel överför vi ekvationen till standardformen

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, x') \end{pmatrix}$$

med

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, x') \end{pmatrix}$$

Stabilitet m a p begynnelsevärden

Idé: stör begynnelsedata, se vad som händer med lösningen:

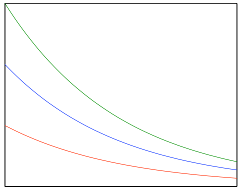
$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\epsilon' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_\epsilon, t) \quad t > 0 \\ \boldsymbol{u}_\epsilon &= \boldsymbol{u}_0 + \epsilon \boldsymbol{e} \end{aligned}$$

där $\|\boldsymbol{u}_0\| \approx \| \boldsymbol{e} \|$ och ϵ liten

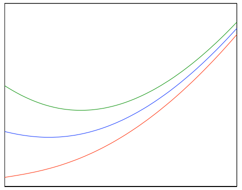
- Intressant fråga: kommer $\boldsymbol{u}_\epsilon(t)$ att stanna nära $\boldsymbol{u}(t)$, eller kommer lösningskurvorna att divergera med växande t?
- Studera först linjära problem!

Exempel, skalära linjära ODE

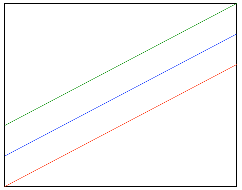
- Lösningen är stabil m a p begynnelsedata om lösningskurvorna inte divergerar då $t \to \infty$
- Instabila problem är känsliga för fel i begynnelsevärden!



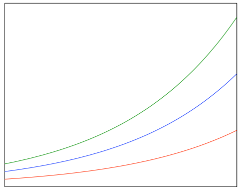
Asymptotisk stabil
$(y' = -y)$



Asymptotisk stabil
$(y' = -y + t^{3/2} + 0.7)$



Stabil
$(y' = 1)$



Instabil
$(y' = y)$

Stabilitet för skalära linjära ODE

$$y' = \alpha y + b(t) \quad t > 0$$
$$y(0) = y_0$$

Ekvationen är

Stabil om $\operatorname{Re}\alpha \leq 0$
Asymptotisk stabil om $\operatorname{Re}\alpha < 0$
Instabil om $\operatorname{Re}\alpha > 0$

Stabilitet för linjära system av ODE

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(t) \quad t > 0$$
$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

Antag att matrisen A av ordning n är **diagonaliserbar**, d v s, det finns n linjärt oberoende egenvektorer $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{C}^n$ så att

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i,$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ är $\boldsymbol{A}$:s egenvärden.

Ekvationen är

Stabil om $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots n$
Asymptotisk stabil om $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad i = 1, \ldots n$
Instabil om det finns ett k sådant att $\operatorname{Re}\lambda_i > 0,$