Numeriska metoder för civilingenjörer

Martin Berggren

5 november 2008

Varför numeriska metoder?

Datorn: ett centralt verktyg för teknisk och vetenskaplig verksamhet

- Beräkning, simulering, visualisering ⇒ Numeriska metoder
- Lagring och bearbetning av stora mängder data (inte i denna kurs!)

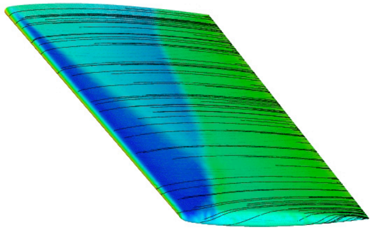
Exempel

- Hållfasthetsberäkningar
- Aerodynamiska beräkningar (flygplan, formel 1, personbilar)
- Elektromagnetiska beräkningar
- Fysikmotorer i spel
- Bildanalys ("förbättra" bilder, hitta kanter, mönster, former)
- Molekyldynamik (läkemedelsdesign)
- Vädersimuleringar för prognoser
- Krocksimuleringar för fordon
- Realtidssimulatorer (ex. flygsimulatorer)

- Exemplen handlar om fenomen som kan beskrivas med **matematiska modeller**
- Ekvationerna kan som regel **inte** lösas "analytiskt"; lösningen ges inte av en formel
- Lösningen kan beräknas **numeriskt**: man kan hitta **approximativa** lösningar m h a datorer

Exempel

- Simulerar luftströmningen kring en flygplansvinge vid Mach 0.84
- Bilden visar tryckfördelning och visualiserar partikelspår
- "λ-stöt": ökad luftmotstånd
- "Luftkrypning" runt spetsen: minskad lyftkraft
- Användes som utgångspunkt för designoptimering: formen förändrades för att minska luftmotståndet men behålla lyftkraften



Beräkning: Olivier Amoignon

Modellering, beräkning, lösning

"Beräkningskedjan"	Felkällor
Verklighet (flygplan vid cruise)	
↓	
Matematisk modell (gasdyn. Eulerekv.)	Förenklingar (ex. bortse från luftviskositet)
↓	
Diskretisering (finita-volymsmetod)	Diskretiseringsfel
↓	
Lösningsalgoritm (multigrid)	Avrundningsfel, approximativa lösningar
↓	
Visualisering	

Steg 1: modellering

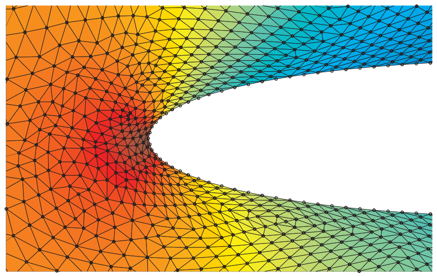
Antaganden: ideal gas, ingen viskositet, stationära förhållanden. Ger Eulers ekvationer från gasdynamiken

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) &= 0 \quad \text{(massbevarande)} \\ \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{I}\, p) &= \boldsymbol{0} \quad \text{(rörelsemängd och kraftbalans)} \\ \nabla \cdot \big(\boldsymbol{u}(\rho E + p)\big) &= 0 \quad \text{(energibevarande)} \end{aligned}$$

- Variabler: t ex densitet (ρ) och tryck (p) i varje punkt i rymden
- System av 5 st (i 3D) icke-linjära partiella differentialekvationer
- Går inte att lösa exakt (förutom i extremt enkla fall)

Steg 2: diskretisering

Kan inte räkna ut t ex trycket i ett oändligt antal punkter.



- Omger vingen med ett *beräkningsnät* (ett nätverk)
- Densitet, hastighet och tryck bestäms endast i noderna ("knutarna" i nätet)
- Kräv mass, rörelsemängd och energibalans i noderna
- Tillåt endast materietransport längs kanterna ("trådarna" i nätet)

Steg 3: lösningsalgoritm

- Diskretisering ger ett mycket stort system av icke-linjära ekvationer (10^3—10^7 st.)
- Löses (iterativt, approximativt) med t ex Newton's metod (förel. 10–11)
- I samband med detta, kan behöva lösa linjära ekvationssystem (förel. 2–3). Ekvationssystemen som regel mycket stora och glesa
- Algoritmerna implementeras i lämpligt programspråk (t ex C; för mindre problem kan Matlab användas)
- Ofta finns färdiga programpaket (t ex för hållfasthets- och strömningsberäkningar)

Viktiga aspekter ur beräkningssynpunkt

- Steg 1 (modellering): välställda matematiska problem
- Steg 2 (diskretisering): noggrannhet, stabilitet
- Steg 3 (lösningsalgoritm): effektivitet (t ex på multicoredatorer), minnesåtgång, stabilitet m a p avrundningsfel,

Historia

1945	den första moderna datorn
1950-tal	grundläggande algoritmer börjar utvecklas
1960	Professurer i numerisk analys inrättas
1975–1990	tvärvetenskaplig breddning
1990–	begreppet "Scientific Computing" eller "Computational Science/Engineering" etableras

Denna kurs

- Kursen ger en "verktygslåda" av metoder som används hela tiden vid vetenskapliga och tekniska beräkningar
  - Flyttalsaritmetik (representation av reella tal i datorn)
  - Numerisk lösning av linjära ekvationssystem, integraler (kvadratur), ordinära differentialekvationer och icke-linjära ekvationer
  - Interpolation, approximation
- 13 föreläsningar (Martin Berggren 11 st, Jerry Eriksson 2 st), varav 3 st räkneövningar
- 2 labbar (linjära ekvationssystem, ordinära diff-ekv). Uppgifterna löses enskilt. Jerry Eriksson handleder och rättar.