INSTITUTIONEN FÖR DATAVETENSKAP
UMEÅ UNIVERSITET

Numeriska metoder för civilingenjörer

Lösningar till tentamen

Tid: 9^{00}–15^{00}, 9 januari 2009
Maximala antal poäng: 40. Gränsen för godkänt: ungefär hälften av maxpoängen
Tillåtna hjälpmedel: räknare, Physics Handbook

1. (a) Med skrivsättet `A\b` löses det linjära ekvationssystemet med Gausselimination, vilket är billigare (mindre antal flyttalsoperationer) än att explicit ta fram inversen och utföra multiplikationen `inv(A)*b`.

   (b) Endast ett begränsat antal reella tal kan exakt representeras som flyttal, därför är det lämpligt att testa om $|f(x) - a| < \epsilon$ (`abs(f - a) < eps`), där $\epsilon > 0$ är ett litet tal.

   (c) För stora h dominerar diskretiseringsfelet (trunkeringsfelet), medan avrundningsfelet dominerar för små h.

   (d) $A = LU$ ger att $A^T = U^T L^T$. Ekvationen $A^T x = b$ kan således skrivas $U^T L^T x = b$ och kan därmed lösas genom att lösa följande två triangulära problem i sekvens:
$$U^T y = b,$$
$$L^T x = y.$$

   (e) Matris 1: illakonditionerad ($\kappa = 10^{20}$). Matriserna 2 och 3: välkonditionerade ($\kappa = 1$). Matris 4: illakonditionerad (kolonnerna linjärt beroende så matrisen är singulär med $\kappa = \infty$).

   (f) Gör en ekvidistant indelning av kvadraten $(0, 1) \times 0, 1$ i n intervall av storlek $h = 1/n$ i varje riktning och låt $x_k = kh$, $y_l = lh$, $k, l = 0, \ldots, n$. Trapetsregeln i vardera riktningen ger
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy \approx \frac{h}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \int_0^1 \left[f(x, y_l) + f(x, y_{l+1}) \right] dx$$
$$\approx \frac{h^2}{4} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(x_k, y_l) + f(x_k, y_{l+1}) + f(x_{k+1}, y_l) + f(x_{k+1}, y_{l+1}) \right].$$

   (g) Sätt $y' = v$ och substituera i ekvationen vilket ger standardformen
$$\begin{pmatrix} v' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(1 - y^2) + y \\ v \end{pmatrix}$$
Alternativt skrivsätt:
$$\begin{pmatrix} v' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}.$$

   (h) Låt $e_k = x_k - \hat{x}$, där $\hat{x}$ är lösningen. Om
$$||e_{k+1}|| \sim C||e_k||,$$
där $0 < C < 1$, så sägs sekvensen x_k konvergera med linjär hastighet och felkonstant C. (Den precisa definitionen är att konvergensen är linjär om det finns en konstant $0 < C < 1$ sådan att $\lim_{k \to \infty} \|e_{k+1}\| / \|e_k\| = C$.)

2. (a) Nedan markeras L-faktorerna i undertriangeln med röda, kursiva siffror.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \mathit{2} & -3 & -6 \\ \mathit{3} & -6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \mathit{2} & -3 & -6 \\ \mathit{3} & \mathit{2} & 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Ax = LUx = b$ med $b = (1,1,1)^T$. Vi löser först $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 - 2y_1 = -1 \\ y_3 = 1 - 3y_1 - 2y_2 = 0 \end{array},$$

och sedan $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 4x_2 - 7x_3 = -1/3 \\ x_2 = (-1 + 6x_3)/(-3) = 1/3, \\ x_3 = 0 \end{array}$$

så $x = (-1/3, 1/3, 0)^T$.

(b) Feluppskattningen

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

gäller för ekvationssystemen $Ax = b$ och $A\tilde{x} = \tilde{b}$, där vektornormen (och associerade matrisnorm) är godtycklig. Från uppgiftsformuleringen vet vi att $\|A^{-1}\|_\infty = 7$ och vi avläser $\|A\|_\infty = 19$, vilket ger att $\kappa_\infty(A) = 133$. Från uppgiftsformuleringen vet vi att $\|b - \tilde{b}\|_\infty = 5 \times 10^{-4}$ och vi ser att att $\|b\|_\infty = 1$, $\|x\|_\infty = 1/3$. Således gäller

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \le \kappa_\infty(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \|x\|_\infty = 133 \cdot 0.0005 \cdot 1/3 \approx 0.0222.$$

(Detta ger ett fel i andra decimalen!).

3. (a) Trapetsregeln ger att

$$T = \int_0^{7800} \frac{1}{v(x)}\, dx \approx \frac{1300}{2} \left(\frac{1}{750} + \frac{2}{680} + \frac{2}{630} + \frac{2}{640} + \frac{2}{690} + \frac{2}{760} + \frac{1}{830} \right)$$
$$\approx 11.3 \text{ h}.$$

(Man kan förstås använda Simpsons metod istället.)

(b) I varje interval kan felet i integranden till beloppet vara maximalt $\epsilon = 1.3 \times 10^{-5}$ km^{-1}h. Multiplicerar man med intervallängden får man det maximala felet p.g.a. avrundingsfel: $7800 \cdot 0.000013 \approx 0.10$ h.

4. (a) Explicit.

(b) Substituera $y_k = y(t_k)$, där y är lösningen till $y' = f(y,t)$, och beräkna VL$-$HL i schemat. Då erhålls

$$
\begin{aligned}
&y(t_{k+1}) - y(t_k) - \frac{\Delta t}{2}\left[3f(y(t_k),t_k) - f(y_{k-1},t_{k-1})\right] \\
&\quad = y(t_{k+1}) - y(t_k) - \Delta t\left[\frac{3}{2}y'(t_k) - \frac{1}{2}y'(t_{k-1})\right] = [\text{Taylorutveckling}] = \\
&\quad = y(t_k) + y'(t_k)\Delta t + y''(t_k)\frac{\Delta t^2}{2} + y'''(t_k)\frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4) - y(t_k) \\
&\quad - \Delta t\left[\frac{3}{2}y'(t_k) - \frac{1}{2}\left(y'(t_k) - y''(t_k)\Delta t + y'''(t_k)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)\right)\right] \\
&\quad = y'''(t_k)\frac{\Delta t^3}{6} + y'''(t_k)\frac{\Delta t^3}{4} = \frac{5}{12}y'''(t_k)\Delta t^3 + O(\Delta t^4),
\end{aligned}
$$

så schemat har noggrannhetsordningen 2.

5. I varje iteration ska steget h beräknas enligt

$$h_n = -J(x_n)^{-1}f(x_n),$$

där

$$J(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 0 \\ 0 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

I varje steg ska alltså ett ekvationssytem lösas, vilket man i detta fall enkelt kan beräkna. Observera dock att man kan inte dividera med matriser och vektorer. I varje iteration ska man också undersöka om sekvensen konvergerat (och egentligen också om sekvensen divergerat). Konvergens kan exempelvis kontrolleras med $||h_n|| < \epsilon_h$, och eventuellt också $||f(x_n)|| < \epsilon_x$. Rätt svar i detta exempel är

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Kvadratisk hastighet.