INSTITUTIONEN FÖR DATAVETENSKAP
UMEÅ UNIVERSITET

Numeriska metoder för civilingenjörer

Tentamen

Tid: 9^{00}–15^{00}, 9 januari 2009
Maximala antal poäng: 40. Gränsen för godkänt: ungefär hälften av maxpoängen
Tillåtna hjälpmedel: räknare, Physics Handbook

1. (a) För att lösa det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ i Matlab rekommenderas att man skriver `x=A\b` och inte `x=inv(A)*b`. Varför? (1p)

   (b) Som en del i en algoritm skulle man vilja testa om $f(x) = a$, där $f(x)$ och a är reella tal. I en Matlabimplementering av algoritmen lagras $f(x)$ och a i flyttalsvariablerna `f` och `a`. Hur bör man genomföra testet? (1p)

   (c) Antag att vi vill approximera derivatan med centraldifferensen
   $$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$
   Vilken typ av fel dominerar för olika storlek på h? (1p)

   (d) Antag att man har beräknat LU-faktoriseringen av en matris, d.v.s. man känner matriserna L och U så att $A = LU$. Hur kan man använda den informationen för att lösa ekvationssystemet $A^T x = b$? (1p)

   (e) Klassificera följande matriser som välkonditionerande (lågt konditionstal) eller illakonditionerade (högt konditionstal):
   $$\begin{pmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (1p)

   (f) Härled en formel för numerisk beräkning av dubbelintegralen
   $$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$$
   genom upprepad användning av trapetsmetoden med ekvidistant indelning, först i ena och sedan i andra riktningen. (1p)

   (g) Skriv följade ekvation (Van der Pols ekvation) på standardformen för begynnelsevärdesproblem:
   $$y'' - y'(1 - y^2) - y = 0.$$
   (1p)

   (h) Vad menas med linjär konvergenshastighet för en metod vid lösande av ickelinjära ekvationssytem? (1p)

2. (a) LU-uppdela matrisen
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$
   utan radpivotering och använd L- och U-faktorerna för att lösa ekvationssystemet $Ax = b$ med $b = (1, 1, 1)^T$. (5p)

(b) Antag nu att vektorn b ovan inte är exakt känd utan avrundad till 3 korrekta decimaler (d.v.s. beloppet av avrundningsfelet i någon komponent av b är inte större än 5×10^{-4}). Antag också att man får veta att $\|A^{-1}\|_\infty = 7$. Hur stort fel finns då i ovan beräknade lösning x i värsta fall? (3p)

3. Man planerar en flygning mellan Stockholm och New York (avstånd ca. 7800 km) med ett plan som har marschfarten 700 km/h. Flygplanets effektiva fart (farten relativt marken) varierar beroende på med- och motvind. Baserad på metereologiska uppgifter uppskattas den effektiva farten hos planet enligt tabellen.

x (km)	v (km/h)
0	750
1300	680
2600	630
3900	640
5200	690
6500	760
7800	830

Flygtiden för en flygning mellan x_1 och x_2 ges av integralen

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{v(x)}\, dx$$

(a) Gör en uppskattning av flygtiden genom att numeriskt beräkna integralen. (5p)

(b) Antag att hastigheterna i tabellen är givna med två korrekta värdesiffror. Detta ger att avrundningsfelet i integranden $1/v(x)$ inte överskrider $\pm 1.3 \times 10^{-5}$ km^{-1}h. Uppskatta hur stort fel som denna avrundning orsakar i integralberäkningen. (3p)

4. Begynnelsevärdesproblemet för differentialekvationen $y' = f(y,t)$ kan läsas numeriskt med metoden

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{2}\left[3f(y_k, t_k) - f(y_{k-1}, t_{k-1})\right]$$

(a) Är metoden explicit eller implicit? (1p)

(b) Härled noggrannhetsordningen för metoden. (7p)

5. Man vill hitta nollstället till

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 \\ 1 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

(a) Givet startpunkten $x_0 = (2.1, 2.1)^T$, finn en lösning med hjälp av Newton's metod. Utför minst fem itererationer. I varje iterationsteg ska avrundning ske med minst tre korrekta värdesiffror. (?p)

(b) Med vilken hastighet konvergerar Newtons metod? (?p)

Lycka till!
Martin Berggren & Jerry Eriksson