Institutionen för datavetenskap
Umeå Universitet

Numeriska metoder för civilingenjörer

Lösningar till tentamen

Tid: 9^{00}–15^{00}, 22 November 2008
Maximala antal poäng: 40. Gränsen för godkänt: ungefär hälften av maxpoängen
Tillåtna hjälpmedel: räknare, Physics Handbook

1. (a) `x = B\(2*A + eye(n))*(C\b + A*b);`

   (b) Kubisk spline är lämplig. Direkt olämpligt är att använda ett 24:e-gradspolynom.

   (c) Nej. Konditionstalet är en egenskap hos matrisen, oberoende av vilken algoritm som används för att faktorisera denna.

   (d) Newton's metod på ekvationen $f(t) = 0$ där
   $$f(t) = \int_0^t e^{x^2}\,dx - 17$$
   är lämplig. Funktionsvärdet beräknas med numerisk kvadratur och derivatan är $f'(t) = e^{t^2}$. Startgissning kan erhållas genom en grov uppskattning av nollstället genom tabulering av talpar $(t, f(t))$.

   (e) Implicita problem kräver ekvationslösning i varje steg. Därför kräver en implicit metod i de flesta fall många fler flyttalsoperationer per tidssteg än en explicit metod med samma noggrannhetsordning. Om tidssteget som krävs för tillräcklig noggrannhet inte orsakar instabilitet är det därför effektivare att använda en explicit metod.

   (f) Linjaritet ger att $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$, så Jakobianen till $\mathbf{f}$ blir $\mathbf{J} = \mathbf{A}$, oberoende av $\mathbf{x}$. Newtons metod blir då
   $$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \mathbf{J}(\mathbf{x}^n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{x}^n - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^n - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$
   så Newtons metod hittar lösningen på ett steg oberoende av startgissning.

   (g) Delsummorna $S_N = \sum_{k=1}^{N} 1/k$ blir så småningom så stora att nästa term $1/(N+1)$ försvinner i avrundningen.

   (h) Ett relevant termineringskriterium i Newtons metod för att lösa ekvationen $f(x) = 0$ är att $\|f(x)\| \leq \epsilon_f$ för aktuell skattning av lösningen. Lösningen i varje iteration uppdateras med steget h som utgör lösningen till $J(x)h = f(x)$, där x är aktuell skattning av lösningen. Eftersom $\|h\| \to 0$ då lösningsskattningarna konvergerar är också kriteriet $\|h\| \leq \epsilon_h$ relevant.

2. (a) Ansätt $A = LU$ med
   $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{11} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix},$$

vilket ger att

$$LU = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} + u_{22}. \end{pmatrix}$$

Identifiering av (1, 1)- och (2, 1)-elementen i A och LU ger ekvationerna $u_{11} = 0$ och $l_{11}u_{11} = 1$ som inte har någon lösning.

(b) Radpivotering.

3. (a) Nedan markeras L-faktorerna i undertriangeln med röda, kursiva siffror.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ \mathit{2} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ \mathit{2} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathit{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathit{2} & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ \mathit{2} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathit{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathit{2} & \mathit{2} & 2 \end{pmatrix},$$

d v s

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Utan radpivotering kan L-faktorerna bli större än ett, vilket kan leda till numerisk instabilitet i form av successiv kraftig förstärkning av avrundingsfel. Det finns även risk för division med noll utan radpivotering.

4. (a) Euler framåt, Euler bakåt, trapetsmetoden.

(b) Substituera $y_k = y(t_k)$, där y är lösningen till $y' = f(y,t)$, och beräkna VL-HL i schemat. Då erhålls

$$\begin{aligned}
&y(t_{k+1}) - y(t_k) - \Delta t\,[\alpha f(y(t_{k+1}), t_{k+1}) + (1-\alpha) f(y(t_k), t_k)] = \\
&= y(t_{k+1}) - y(t_k) - \Delta t\left[\alpha y'(t_{k+1}) + (1-\alpha) y'(t_k)\right] = [\text{Taylorutveckling}] = \\
&= y(t_k) + y'(t_k)\Delta t + y''(t_k)\frac{\Delta t^2}{2} + y'''(t_k)\frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4) - y(t_k) \\
&- \Delta t\left[\alpha\left(y'(t_k) + y''(t_k)\Delta t + y'''(t_k)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)\right) + (1-\alpha)y'(t_k)\right] = \\
&= y''(t_k)\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Delta t^2 - y'''(t_k)\frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4).
\end{aligned}$$

Noggranhetsording 2 för $\alpha = 1/2$. Annars noggranhetsordning 1.

(c) Schemat använt på modellekvationen ger

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\,(\alpha\lambda y_{k+1} + (1-\alpha)\lambda y_k)\,,$$

d v s

$$(1 - \alpha\Delta t\lambda) y_{k+1} = [1 + \Delta t(1-\alpha)\lambda]\, y_k.$$

För stabilitet krävs $|y_{k+1}| \leq |y_k|$, vilket ger att

$$\frac{\big|1 - \Delta t(1-\alpha)|\lambda|\big|}{|1 + \alpha\Delta t|\lambda||} \leq 1,$$

eftersom $\lambda \leq 0$. Då nämnaren ovan alltid är positiv får vi att

$$-1 - \alpha\Delta t|\lambda| \leq 1 - \Delta t(1-\alpha)|\lambda| \leq 1 + \alpha\Delta t|\lambda|.$$

Den högra olikheten är alltid uppfylld och den vänstra ger att

$$\Delta t(1-2\alpha)|\lambda| \leq 2,$$

vilket alltid är uppfyllt för $1/2 \leq \alpha \leq 1$, vilket ger att schemat är ovillkorligt stabil för dessa α. Dessutom följer följande stabilitetsvillkor

$$\Delta t|\lambda| \leq \frac{2}{1-2\alpha} \qquad \text{för } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}.$$

5. (a) Subtraheras ekvationen vi vill lösa, $x^* = \phi(x^*)$, från iterationsmetoden $x_{n+1} = \phi(x_n)$ erhålls med hjälp av medelvärdessatsen

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) = \phi'(\xi_n)(x_n - x^*),$$

för något ξ_n i intervallet mellan x_n och x^*, vilket ger att

$$|x_{n+1} - x^*| \leq |\phi'(\xi_n)||x_n - x^*|.$$

Således får vi konvergens av talföljden $x_0, x_1, \ldots$, om $|\phi'(\xi)| < 1$ för alla ξ i ett intervall I sådant att $x^* \in I$ och om man startar med $x_0 \in I$.

(b) Låt

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \sin(2x_n).$$

Vi får $\phi'(x_n) = 2\cos(2x_n)$. Genom att prova med punkter nära rötterna (eller exakt rötterna), så ser vi om fixpunktsiterationerna konvergerar eller ej. För $x_1 = 0$ får vi $|\phi'(0)| = |2\cos(0)| = 2 > 1$. Ej konvergens. För de två övriga erålls konvergens eftersom $|\phi'(x_2)| = |\phi'(x_3)| \approx 0.638 < 1$.

(c) Konvergensen har linjär ordning. Det är också godkänt att skriva "linjär konvergenshastighet".