Institutionen för datavetenskap
Umeå Universitet

Numeriska metoder för civilingenjörer

Tentamen

Tid: 9^{00}–15^{00}, 22 November 2008
Maximala antal poäng: 40. Gränsen för godkänt: ungefär hälften av maxpoängen
Tillåtna hjälpmedel: räknare, Physics Handbook

1. (a) *Utan* att använda matrisinvers (`inv`), skriv ett Matlabuttryck som beräknar vektorn
$$x = B^{-1}(2A + I)(C^{-1} + A)b,$$
där A, B och C är givna $n \times n$ matriser, med B och C ickesingulära, och b är en given n-vektor. (1p)

   (b) En serie av 25 stycken x- och y-koordinater för formen av en valvbåge i en kyrka har uppmäts. Man vill nu interpolera dessa punkter för att konstruera en ritning av objektet. Ange ett lämpligt sätt att utföra interpolationen. (1p)

   (c) Beror konditionstalet hos en linjärt ekvationssystem på vilken algoritm som används för att lösa problemet? (1p)

   (d) Man söker t så att $\int_0^t e^{x^2}\,dx = 17$. Föreslå en metod att lösa detta problem! (1p)

   (e) Implicita metoder för att lösa begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer har typiskt ett mycket större stabilitetsområde än explicita metoder av samma noggrannhetsordning. Varför används då inte alltid implicita metoder? (1p)

   (f) Hur många iterationer behöver Newtons metod för att lösa ett *linjärt* ekvationssystem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$? Motivera. (1p)

   (g) Varför har den divergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ en ändlig summa i flyttalsaritmetik? (1p)

   (h) Vid implementation av en iterationsmetod bör man begränsa antalet iterationer (för att upptäcka divergens). En sådan begränsning är alltid ett av termineringskriterierna. För Newtons metod för lösning av icke-linjära ekvationsystem så bör det även finnas två ytterligare termineringskriterier, detta för att verifiera konvergens. Vilka är dessa två? (2p)

2. (a) Visa att matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
inte har någon LU-uppdelning, d v s att det inte finns faktorer L och U (med den struktur som vi gått igenom i kursen) sådana att $A = LU$. (5p)

   (b) Vad gör programvara för lösning av linjära ekvationssystem (t ex Matlab) för att ändå kunna behandla matriser som A ovan? (1p)

(fortsätter på baksidan)

3. (a) LU-uppdela matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Radpivotering skall inte utföras. Utför uppdelningen på plats i matrisen (som en datoralgoritm gör) men ange även de slutliga L och U-faktorerna. (6p)

(b) Vad kan gå fel i en LU-uppdelning om man inte radpivoterar? (2p)

4. Begynnelsevärdesproblemet för differentialekvationen $y' = f(y,t)$ kan lösas numeriskt med det s k α-schemat

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\big[\alpha f(y_{k+1}, t_{k+1}) + (1-\alpha) f(y_k, t_k)\big],$$

där $0 \leq \alpha \leq 1$.

(a) Vilka tre metoder erhåller man om man väljer $\alpha = 0$, 1 respektive $1/2$? (1p)

(b) Bestäm noggrannhetsordningen på schemat för alla $0 \leq \alpha \leq 1$. (4p)

(c) För alla $0 \leq \alpha \leq 1$, bestäm stabilitetsvillkoren på negativa reella axeln, d v s stabilitetsvillkoren för schemat när det används på ekvationen $y' = \lambda y$ för $\lambda \leq 0$. (4p)

5. (a) Antag att vi har fixpunktsiterationen

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

för lösning av icke-linjära ekvationer. Under vilket villkor uppnås konvergens för talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$? Härled! (4p)

(b) Ekvationen $f(x) = \sin(2x) - x$ har tre rötter. Dessa är: $x_1 = 0, x_2 \approx 0.947747, x_3 \approx -0.947747$. Kan man med fixpunktierationen

$$x_{n+1} = \sin(2x_n)$$

finna något eller några av rötterna. Naturligtivs får man anta att x_0 får väljas godtyckligt nära den fixpunkt (rot) man söker. (3p)

(c) Vilken konvergensordning har metoden i (b)? Motivera! (1p)

Lycka till!

Martin Berggren & Jerry Eriksson