Institutionen för datavetenskap
Umeå Universitet
Martin Berggren

14 november 2008
Numeriska metoder för civilingenjörer

Uppgifter: numerisk lösning av ordinära differentialekvationer

1. Skriv följande ekvationer i standardformen för begynnelsevärdesproblem:

   (a) Duffings ekvation:
   $$y'' + \delta y' + \sigma(y^3 - y) = \gamma \sin \omega t$$

   (b) Blasius ekvation:
   $$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

2. Är följande ekvation stabil?
$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 1000 y_2 \\ y_2' &= -2 y_2. \end{aligned}$$

3. Avgör stabilitetsegenskaperna hos begynnelsevärdesproblemen

   (a)
   $$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 && t > 0 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 && t > 0 \\ y_1(0) = 0&, \quad y_2(0) = 0; \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 && t > 0 \\ y_2' &= y_1 - y_2 && t > 0 \\ y_1(0) = 0&, \quad y_2(0) = 0; \end{aligned}$$

4. Skriv om ekvationen för den *harmoniska oscillatorn*
$$\begin{aligned} my'' + ky &= 0 && t > 0, \\ y(0) = y_0&, \quad y'(0) = g_0 \end{aligned}$$
i standardformen för begynnelsevärdesproblem och undersök stabiliteten.

5. Visa att begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \quad t > 0 \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{aligned} \tag{1}$$
är asymptotiskt stabil om matrisen $\boldsymbol{A}$ är negativt definit, d v s om det gäller att $\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{z} < 0$ för alla nollskilda vektorer $\boldsymbol{z}$.

   Ledning: Härled först en ekvation för $\boldsymbol{e}_\epsilon(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_\epsilon(t)$, där $\boldsymbol{y}_\epsilon$ är lösningen till ekvation (1) med stört begynnelsevärde. Studera sen uppförandet av $\|\boldsymbol{e}_\epsilon(t)\|$. Detta sätt att studera stabilitet brukar kallas för *energimetoden*.

6. Med Runge–Kuttas metod löser man numeriskt ett begynnelsevärdesproblem i ett begränsat intervall. Med en viss steglängd kan man uppskatta felet i lösningen till 10^{-3} vid sluttiden. Sedan minskas steglängden med en tiopotens och man löser problemet igen. Vilket fel är det rimligt att förvänta sig vid sluttiden med användning av det kortare tidssteget?

7. Förklara varför man skulle föredra att behandla differentialekvationen

$$
\begin{aligned}
y'' + 1001y' + 1000y &= 0 \qquad\qquad t > 0 \\
y(0) = 1, \quad y'(0) &= -1
\end{aligned}
$$

med trapetsmetoden istället för med klassiska Runge–Kutta. (från Pohl: *Grundkurs i numeriska metoder*, Liber, 2005)

8. Härled noggrannhetsordningen för nedanstående metoder.

(a) Trapetsmetoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{2}\big[f(y_k, t_k) + f(y_{k+1}, t_{k+1})\big].$$

(b) *Leapfrogschemat*:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + f(y_k, t_k) 2\Delta t.$$

(c) Heuns metod:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{\Delta t}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad \text{där} \\
\kappa_1 &= f(y_k, t_k), \\
\kappa_2 &= f(y_k + \Delta t \kappa_1, t_{k+1}).
\end{aligned}
$$

9. Visa att trapetsmetoden (problem 8a) är ovillkorligt stabil.