Institutionen för datavetenskap
Umeå Universitet
Martin Berggren

9 november 2008
Numeriska metoder för civilingenjörer

Uppgifter: numerisk lösning av linjära ekvationssystem

1. Ange ett sätt att beräkna determinanten av en kvadratisk matris med $O(n^3)$ aritmetiska operationer.

2. T är en övertriangulär matris. Vilken form har T^2, TT^T, T^TT och T^{-1}?

3. (a) Visa att $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ och $\|\cdot\|_1$ uppfyller
   i. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
   ii. $\|cx\| = |c|\|x\|$
   iii. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

   (b) Definition av *p-normen* : $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^n)^{1/p}$. Visa att $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

4. Hur ser de olika "enhetscirklarna" ut? D v s, vad är följande i $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\|x\|_2 = 1$, (b) $\|x\|_\infty = 1$, (c) $\|x\|_1 = 1$

   Rita figurer!

5. Beräkna matrisnormerna $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, då

$$A = \begin{pmatrix} -1.1 & 2 & 0.5 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 0.5 \\ 1.5 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & -0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

6. (a) Härled formeln för $\|A\|_\infty$, d v s att maxnormen är lika med maximala radbeloppssumman.

   (b) Visa att olikheterna

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|AB\| \le \|A\|\|B\|$$

   uppfylls av alla matrisnormer.

7. Ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   har exakta lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

   (a) Uppskatta systemets konditionstal (valfri norm) genom att lösa ekvationssystemet med högerleden ändrade till $1 + \epsilon$, $-1 + 2\epsilon$ respektive $1 - \epsilon$.

   (b) Beräkna konditionstalet (valfri norm).

8. (a) Lös ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0.01 \\ x_1 + x_2 = 2.99 \end{cases}$$

(b) Uppskatta konditionstalet genom att jämföra störningen i lösningen med störningen i högerledet.

(c) Räkna ut konditionstalet exakt.

9. (a) Bestäm lösningen (till exempel med Matlab) till $Ax = b$ för

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

och högerleden

$$b_1 = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 31.9 \\ 23.1 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

(b) Räkna ut $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ och förklara varför relativa ändringen i lösningen i (a) kan vara så mycket större än relativa ändringen i högerledet.

(c) Lös även systemet med högerledet

$$b_3 = \begin{pmatrix} 32.32 \\ 23.23 \\ 33.33 \\ 31.31 \end{pmatrix}$$

Kommentera resultatet!

10. (a) Illustrera med hjälp av koefficientmatriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

skillnaden mellan ett *illakonditionerat problem* och en *instabil algoritm*.

(b) Beräkna determinanterna till A och B samt konditionstalen. Beräkna samma storheter för $10000A$ $B/10000$. Vad säger determinanten om konditionen?