

## Blandade uppgifter

1. Derivatans av en glatt funktion kan approximeras med

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diskretiseringsfelet minskar med minskad steglängd  $h$  medan avrundningsfelet ökar med minskande steglängd på grund av cancellation. Härled en formel för den optimala steglängden, dvs den steglängd där diskretiserings- och avrundningsfelen är lika stora, för ett flyttalssystem karakteriserat av maskinepsilon  $\epsilon_M$ .

2. Antag att vi har den tridiagonala matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} & & \\ & & & & & b_n & a_n & & \end{pmatrix}$$

Antag att man vet att matrisen kan LU-uppdelas utan pivoting. (Pivoting behövs ej om matrisen till exempel är positivt eller negativt definit).

- (a) Vilken struktur har  $L$ - och  $U$ -faktorerna? Hur lagras man lämpligen dessa i datorn?  
(b) Tag fram uttryck för  $L$  och  $U$ -faktorerna.

3. En funktion  $f$  är beräknad i ett antal punkter på ett intervall enligt tabellen. Det är ganska uppenbart att funktionen har ett maximum i intervallet, och det är ganska troligt att detta maximum inte ligger exakt i en av de givna punkterna.

$x$	$f(x)$
0.0	0.1206
0.1	0.2506
0.2	0.4329
0.3	0.6532
0.4	0.8748
0.5	1.0441
0.6	1.1136
0.7	1.0656
0.8	0.9213
0.9	0.7295
1.0	0.5427

- (a) Interpolera funktionen med ett polynom för att noggrannare uppskatta maximums läge. Vilka punkter och vilket gradtal på polynomet är lämpligt att använda?  
(b) Utför interpolationen och uppskatta maximums läge.

4. (a) Ger trapetsformeln för stort eller för litet värde då den tillämpas på

$$\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx?$$

- (b) Samma fråga för Simpsons formel och

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$

5. Ställ upp en finita-differensmetod för det periodiska problemet

$$\begin{aligned} -y'' + 2y &= f && \text{för alla } x, \\ y(x) &= y(x + 1) && \text{för alla } x, \end{aligned}$$

och ange det linjära ekvationssystem som metoden ger upphov till.