Tentamen

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

19 mars 2008

Examinator: Pedher Johansson
Skrivtid: 9 – 15
Hjälpmedel: Inga böcker
Ingen miniräknare

Maximala poäng på tentamen är 40 poäng. Följande betygsgränser gäller.

betyg	Poäng
U	$<$ 20 p
3	20 - 25 p
4	26 - 31 p
5	32 - 40 p

- Uppgifterna är slumpvis ordnade
- Börja varje uppgift på ett nytt blad och skriv uppgiftsnummer längst uppe till höger
- Skriv ditt kodnummer på *varje* blad
- Läs frågan noggrant och besvara de sökta frågeställningarna.
- Uttryck dig *mycket tydligt*. Alla *otydligheter* tolkas till din *nackdel*.
- Även om du inte klarar hela uppgiften kan du få poäng, lös därför så mycket du kan.
- Är frågan uppdelad i flera deluppgifter kan man klara senare deluppgifter även om man inte klarat de första. Försök därför att klara *alla* deluppgifter.
- Resultat kommer att tillkännages via e-post och på kursens hemsida.
- Lärare kommer förbi vid 11.00 och 13.00.
- Fråga om något är oklart!

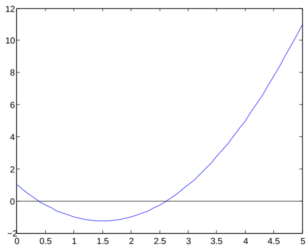
Lycka till!

Uppgift 1 (4 p) – *Fixpunktsmetoden*

Man vill lösa andragradsekvationen $x^2 - 3x + 1 = 0$ med fixpunktsmetoden

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1).$$

Experimentellt finner man att iterationerna konvergerar mot den mindre roten, om de alls konvergerar. Förklara detta!



Uppgift 2 (2+2 p) – *Newton-Raphson*

Ekvationen

$$\frac{1}{x^4} + e^{x-100} = 16$$

har en positiv rot mindre än 1.

a)

Formulera Newton-Raphsons metod för noggrannare bestämning av roten.

b)

För att få snabb konvergens med metoden behövs ett bra startvärde, dvs ett startvärde som ligger nära den sökta roten. Bestäm ett bättre startvärde än $x_0 = 0$ eller $x_0 = 1$. Motivera hur du kommer fram till det.

Uppgift 3 (2+4 p) – *Nogrannhetsordning*

För vissa numeriska metoder, t ex Eulers metod, trapetsregeln, Runge-Kuttas metod m.fl., beror trunkeringsfelet av den steglängd h som används.

a)

Vilken noggrannhetsordning har Eulers metod resp. trapetsregeln?

b)

Trunkeringsfelet hos en metod beror av h enligt formeln $E_T = ch^p$. För en viss metod har följande trunkeringsfel uppmätts för tre olika steglängder: Då $h = 0.01$ blir $E_T = 10^{-10}$, då $h = 0.1$ blir $E_T = 10^{-3}$ och då $h = 1$ blir $E_T = 10^{-2}$. Bestäm c och p ur dessa data med minstakvadratmetoden.

Uppgift 4 (2+4 p) – *ODE*

Givet differentialekvationsproblemet:

$$y'' - y' + y = x, \qquad y(0.1) = 0.2, \qquad y'(0.1) = 0.3$$

a)

Ställ upp problemet på standardform.

b)

Skatta $y(0.5)$ med Eulers metod (explicit) och steglängden 0.2.

Uppgift 5 (2 p) – *Bestämning av rötter*

Ekvationen $\tan(x) = x$ har oändligt många rötter. En rot finns vid $x = 0$. Vi vill bestämma de första positiva rötterna. Det är då lämpligt att först skriva om ekvationen genom förlängning med $\cos(x)$, förklara varför!

Uppgift 6 (1+2+2+1 p) – *Kondition*

Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & \square \end{bmatrix}.$$

a)

Ange ett värde att sätta in i rutan så att matrisen A blir *rangdefekt.*

b)

Givet värdet angett i a), ange en vektor/vektorer som spänner upp *värderummet* till A.

c)

Givet värdet angett i a), ange en vektor/vektorer som spänner upp *nollrummet* till A.

d)

Ange ett värde att sätta in i rutan så att matrisen A blir *illa konditionerad.*

Uppgift 7 (2+2 p) – *LU-faktorisering*

När vi härleder algoritmen bakom LU-faktorisering utan pivotering får vi en sekvens M_i-matriser enligt följande,

$$M_{n-1} \dots M_2 M_1 A = U,$$

där $\{A, U, M_1, \dots, M_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och U är övertriangulär.

a)

Givet $n = 6$, visa hur M_3 ser ut, där ettor är markerade med '1' och nollor med '0' eller ' ', samt övriga värden med 'x'. Beskriv också hur 'x'-värdena är beräknade.

b)

Från ekvationen ovan visa hur vi kan härleda matrisen L, så att $A = LU$, där $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och L är undertriangulär.

Uppgift 8 (2+4+2 p) – *Tabelldata*

I ett experimentellt försök har vi följande mätvärden.

f	0.98	1.02	1.06	1.10	1.14	1.20	1.32	1.72	2.34
t	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1

Vi vill nu uppskatta $f'(0.7)$ så noga vi kan, dvs med centraldifferensen samt Richardsonextrapolation.

a)

Ställ upp formeln för centraldifferansen och beräkna uppskattningen av derivatan, $D(h)$, i $t = 0.7$ med steglängden h lika med 0.1, 0.2 samt 0.4.

b)

Ställ upp schemat för Richardsonextrapolation och eliminera första och andra feltermen i trunkationsfelet.

c)

Uppnås regelbundenhet i schemat? Motivera ditt svar.