Tentamen

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

27 augusti 2007

Examinator:	Pedher Johansson
Skrivtid:	9 – 15
Hjälpmedel:	Inga böcker
	Ingen miniräknare

Varje uppgift bedöms med betyget U, 3, 4 eller 5. Snittbetyget måste överstiga 2.4 för godkänt resultat.

	U	< 2.4 p
2.4 p $\leq$	3	< 3.2 p
3.2 p $\leq$	4	< 4.2 p
4.2 p $\leq$	5	≤ 5 p

- Uppgifterna är slumpvis ordnade
- Börja varje uppgift på ett nytt blad och skriv uppgiftsnummer längst uppe till höger
- Skriv namn på *varje* blad
- Läs frågan noggrant och besvara de sökta frågeställningarna.
- Uttryck dig *mycket tydligt.* Alla *otydligheter* tolkas till din *nackdel.*
- Även om du inte klarar hela uppgiften kan du få poäng, lös därför så mycket du kan.
- Är frågan uppdelad i flera deluppgifter kan man klara senare deluppgifter även om man inte klarat första. Försök därför att klara *alla* deluppgifter.
- Resultat kommer att tillkännages via e-post och på kursens hemsida.
- Lärare Pedher Johansson kommer förbi vid 11.00.
- Fråga om något är oklart!

Lycka till!

Uppgift 1 Begrepp

Beskriv (översiktligt) följande begrepp som vi använt på kursen.

1. Konvergensordning.
2. Implicit Euler.
3. Medelvärdessatsen.
4. Runges fenomen.
5. Värderum och nollrum.
6. Teoretisk kontra exprimentell felanalys.

Uppgift 2 Stabilitet

Vi vill beräkna nedanstående integral för värdena $n = 1 \ldots 100$.

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

Vi kan omskriva integralen med partiell integration till

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^x\right]_0^0 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x dx = \frac{e}{n+a} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

Vilket alltså är ekvivalent med

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n \tag{1}$$

Eureka - Rekursion!! Vi kan också snabbt beräkna $I_0 = e - 1 = 1.71828...$ och därmed få fram I_1, I_2 osv.. Vi kan också skriva om rekursionen där vi kör den ”bakvägen”

$$I_n = \frac{e - I_{n+1}}{n+1}. \tag{2}$$

Vi får alltså två algoritmer som beskriver samma rekursion. Den vänstra beskriver (1) medan den högra beskriver (2).

Algoritm 1

```
I(1) = 1;
e = exp(1);
for n=1:99
   I(n+1) = e - (n+1)*I(n)
end
```

Algoritm 2

```
I(110) = 0.5;
e=exp(1);
for n=109:-1:1
   I(n) = (e - I(n+1))/(n+1);
end
```

Vid körning av den vänstra algoritmen börjar vi med I_0. Vid körning av den högra algoritmen däremot, börjar vi istället köra den från $n = 110$ och höftar bara ett startvärde. De två algoritmerna visare sig dock ge helt olika svar (se tabbelen nedan) och dessutom ett något förvånande resultat.

Körning Algoritm 1

n	I_n
1	1.0000
2	0.7183
3	0.5634
4	0.4645
5	0.3956
...	
16	0.1503
17	0.1624
18	-0.2043
19	6.5991
20	-129.2637
...	
98	-0.501344442411.0e+138
99	0.49633099798881.0e+140
100	-0.4963309979888091.0e+142

Körning algoritm 2

n	I_n	fel i I_n
110	0.5	0.5
109	0.0201	4.55e-03
108	0.0248	4.17e-05
107	0.0249	3.86e-07
100	0.0267	1.01e-16
99	0.0269	1.01e-16
98	0.0272	1.01e-16
...		
20	0.1239	1.04e-16
19	0.1298	1.05e-16
18	0.1363	1.05e-16
17	0.1435	1.05e-16
...		
3	0.5634	1.30e-16
2	0.7183	1.44e-16
1	1.0000	1.72e-16

Fråga:

Vad är det i den första algoritmen som gör att den inte fungerar medan den andra fungerar? Resonera vidare kring begreppen stabilitet med utgångspunkt i det aktuella exemplet.

Uppgift 3 Interpolation

Enzymer är speciella proteiner som katalyserar kemiska reaktioner i levande organismer. Det ämne som ragerar i en enzymkatalysad kallas substrat och under vissa förutsättningar kan halten av detta ämne $y(t)$ beskrivas med följande modell

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \sin^3(kt^2) + c_5 \cos^3(kt^2)$$

där $c_i,\ i = 1, \ldots, 5$ är obekanta medellparametrar som man önskar bestämma för att få en komplett modell. Vidare är värdet på k känt och lika med 0.3. Följande diskreta data för substrathalten är given:

t	0.0	3.5	7.25	11.5	20.0	32.75	43.0	53.5	64.0	75.0
y	0.1	3.2	7.5	9.3	11.8	15.0	21.5	28.0	31.3	37.6

Ställ upp det linjära ekvationssystem som du ska lösa för att bestämma de okända modellparametrarna från de givna mätatvärdena. Du ska inte explicit räkna ut vektorn x utan bara ange det aktuella ekvationssystemets koefficientmatris A, lösningsvektorn x samt högerledsvektorn b. Vidare förväntas ni inte explicit räkna ut komplicerade matematiska uttryck i matrisen A, däremot ska dessa uttryck skrivas ut så att det tydligt framgår vilka A's element är.

I uppgiften ingår även att redogöra för hur matrisen A's struktur kan påverka lösningskvaliteten samt ange åtgärder för att i detta fallet reducera dålig kondition.

Uppgift 4 Ekvationssystem

Antag att vi har ett ekvationssystem $Ax = b$ där $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Belys följande frågeställningar i *två fall*. Nämligen dels att $m < n$ och dels att $m > n$.

1. Vilka egenskaper måste b ha för att vi ska få ett exakt x?
2. Om b inte uppfyller ovanstående egenskaper, vilka egenskaper vill mest troligt att x har?
3. Beskriv minst en numeriskt stabil metod att bestämma ett x i de två fallen.

Uppgift 5 Beräkningar av Integraler eller derivator

Beskriv *en* metod för att *antingen* beräkna derivator *eller* integraler numeriskt sanarare än analytiskt.

Jag vill alltså att du namnger den metod du vill beskriva, samt beskriver hur den fungerar. Beskriv vidare hur det fel som uppstår kan minimeras med Richardsonextrapolation.

Uppgift 6 Lösning av icke-linjära ekvationer

Beskriv principerna bakom samt styrkor och svagheter med de tre metoderna

1. Sekantmetoden
2. Intervallhalveringsmetoden
3. Newton-Raphsons metod

för att lösa icke-linjära ekvationer av typen $f(x) = 0$.

Uppgift 7 Filosofi

På vilket sätt bör man som datavetare resonera när det gäller kompromisser mellan

- en algoritms stabilitet,
- en algoritms komplexitet,
- samt svarets noggrannhet.

Beakta gärna följande frågeställningar

- Vi ska lösa små ordinära differentialekvationer i det datorspel där vi vill köra med skärmuppdateringar i 80Hz.
- Vi ska köra en simulering av värmespriding i ett motorblock som inbegriper en 1000×1000 stor matris som vi gör diverse operationer på.
- Vi gör ett GUI-program som bland annat innebär sortering och enkel analys av datalistor.