UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap

TENTAMEN

Tentamen

Lösningsförslag

16 mars 2007

Examinator:	
Skrivtid:	16 – 22
Hjälpmedel:	Inga böcker
	Ingen miniräknare

Uppgift 1 Talrepresentation

Term	Värde	Omskrivet i given representation
a	$= 1$	$= +0.100 \cdot 10^1$
b	$= 10^{-3}$	$= +0.100 \cdot 10^{-2}$
c	$= -1$	$= -0.100 \cdot 10^1$
$(a+b) = d$	$= 1.001 = 0.1001 \cdot 10^1$	$\approx +0.100 \cdot 10^1$
$(b+c) = e$	$= -0.999$	$= -0.999 \cdot 10^0$
$(a+b)+c = d+c$	$= 0$	$= +0.000 \cdot 10^0$
$a+(b+c) = a+e$	$= 0.1$	$= +0.100 \cdot 10^0$

$(a+b)+c$ ger ett felaktigt svar p.g.a trunkering. $a+(b+c)$ ger däremot rätt svar.

Uppgift 2 Matrisfaktoriseringar

Givet $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

a)

LU	$m = n$ och A måste ha full rang.
QR	inga begränsingar.
Cholesky	$m = n$ och A positivt definit.

b)

LU	$A = L \cdot U$ där L är undertrinagular, U är övertriangulär och båda kvadratiska. Givet $Ax = LUx = b$, lös först $Ly = b$ med framåtsubstitution, därefter $Ux = y$ med bakåtsubstitution.
QR	$A = Q \cdot R$ där Q $(m \times m)$ är ortogonal och R $(m \times n)$ är övertriangulär. Givet $Ax = QRx = b$, lös $Rx = Q^T b$ med bakåtsubsitution.
Cholesky	$A = L \cdot L^T$ där L $(n \times n)$ är undertriangular. Givet $Ax = LL^T x = b$, lös först $Ly = b$ med framåtsubstitution, därefter $L^T x = y$ med bakåtsubstitution.

Uppgift 3 SVD, kondition och stabilitet

a)

Givet i uppgiften var $A^+ = V_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}}^{-1} U_{\mathcal{R}}^T$, där

$V_{\mathcal{R}}$	3×2
$S_{\mathcal{R}}$	2×2
$U_{\mathcal{R}}^T$	2×3

En matris-multiplikation $A \cdot B = C$ är giltig om A har lika många kolumner som B har rader, eller $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ och resultatet blir $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Detta är uppfyllt för samtliga ovanstående multiplikationer. Inversen på en diagonalmatris är en diagonalmatris där diagonalelementen är inverterade, alltså

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \\ & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}$$

b)

Givet i uppgiften var att $A = U_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}}^T + U_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}^T$. Efterfrågat var $\| A\tilde{x} - U_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}}^T \tilde{x} \|_2$, Alltså får vi

$$\| A\tilde{x} - U_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}}^T \tilde{x} \|_2 = \| U_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}}^T \tilde{x} + U_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}^T \tilde{x} - U_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}}^T \tilde{x} \|_2 = \| U_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}^T \tilde{x} \|_2$$

Då $S_{\mathcal{N}} = 1 \cdot 10^{-14}$ och U och V ortogonala får vi att $\| A\tilde{x} - U_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}}^T \tilde{x} \|_2 = 1 \cdot 10^{-14} \| \tilde{x} \|_2$ (Även $1 \cdot 10^{-14} \| UV^T \tilde{x} \|_2$ accepteras om man inte vet att U och V är ortogonala).

I exemplet har vi i praktiken förändrat b-vektorn en aning jämfört med om σ_3 varit exakt 0, men att denna förändring är väldigt liten (i storleksorning $1 \cdot 10^{-14}$). Lösningen $\tilde{x}$ borde alltså främst påverkas av konditionen på pseudo-inversen.

c)

Givet i uppgiften var $u_3 \sigma_3 v_3^T \delta x = \delta b$. Alltså är

$$\delta x = \frac{u_3^T v_3 \delta b}{\sigma_3}.$$

Om $\sigma_3 \ll 1$ växer δx väldigt fort. Ett litet fel i b växer alltså med en faktor $1/\sigma_3$ och om σ_3 är 10^{-14} blir alltså felet i x av storleken 10^{14}.

Utanför uppgiften kan vi alltså notera att om vi använder σ_3 får vi väldigt stora fel, men en lösning $\tilde{x}$ enbart beror på konditionen av pseudo-inversen (där alltså σ_3 är borttagen) vilket borde vara stabilt.

Uppgift 4 Interpolation och Approximation

a)

Givet i uppgiften var ekvationen $ax^2 + bxy + cx + dy + e = x^2$, vilket vi kan skriva om på ett system av formen

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix}$$

Vidare har vi 5 obekanta och 10 ekvationer, varpå detta är frågan om en *interpolation.*

b)

Runges-fenomen uppträder då man försöker anpassa att polynom av hög grad till ett antal mätpunkter. Fenomenet innebär att kurvan kommer att svänga kraftigt mellan interpolationspunkterna om dessa avviker om än så lite från en kurva av lägre grad. Ju högre grad på polynomet desto kraftigare svängningar.

Detta kan man undvika genom att istället approximera med ett polynom av lägre grad, eller använda splines för att interpolera.

Uppgift 5 Richardsonextrapolation

a)

Om vi ställer uppp Richardsonextrapolationsschemat får vi

$$
\begin{array}{lllll}
F(4h) = D_3 & & & & \\
 & \Delta_2 = D_2 - D_3 & & & \\
F(2h) = D_2 & & \hat{D}_2 = D_2 + \Delta_2 & & \\
 & \Delta_1 = D_1 - D_2 & & \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{D}_1 - \hat{D}_2}{3} & \\
F(h) = D_1 & & \hat{D}_1 = D_1 + \Delta_1 & & \hat{\hat{D}}_1 = \hat{D}_1 + \hat{\Delta}_1
\end{array}
$$

Applicerat på vårt polynom blir det då för ett helt godtyckligt $x = h$ följande.

$$
\begin{array}{lllll}
F(4h) = f(4h) = c_0 + 4c_1h + 16c_2h^2 & & & & \\
 & \Delta_2 = -2c_1h - 12c_2h^2 & & & \\
F(2h) = f(2h) = c_0 + 2c_1h + 4c_2h^2 & & \hat{D}_2 = c_0 - 8c_2h^2 & & \\
 & \Delta_1 = -c_1h - 3c_2h^2 & & \hat{\Delta}_1 = \frac{6c_2h^2}{3} & \\
F(h) = f(h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 & & \hat{D}_1 = c_0 - 2c_2h^2 & & \hat{\hat{D}}_1 = c_0
\end{array}
$$

Om vi nu tar detta och applicerar på våra funktionvärden får vi

$$
\begin{array}{lllll}
F(4h) = f(4) = -3 & & & & \\
 & \Delta_2 = 6 & & & \\
F(2h) = f(2) = 3 & & \hat{D}_2 = 9 & & \\
 & \Delta_1 = -2 & & \hat{\Delta}_1 = \frac{-10}{3} & \\
F(h) = f(1) = 1 & & \hat{D}_1 = -1 & & \hat{\hat{D}}_1 = \frac{-13}{3}
\end{array}
$$

Alltså är $c_0 = -\frac{13}{3}$. Nu kan vi lösa ut $c_1 = 7$ och $c_2 = -\frac{5}{3}$ från $\hat{D}_1$ och D_1.

Tyvärr hade jag råkat skriva fel siffror varpå räkningen blev onödigt krånglig. Jag ber om ursäkt för detta.

b)

Tabellfelet ges av med vilken noggrannhet vi kan beräkna f_i och trunkeringsfelet ges av hur många av feltermera c_ih^{2i} som kvarstår. Ges funktionsvärden av tabellvärden med en fix nogrannhet kommer detta fel att bli förhållandevis stort. Ges funktionsvärdena av en ananlytisk funktion är detta fel av storleksordning på maskinnoggrannheten. Givet är att vi för maximal noggrannhet bör får trunkeringsfelet att understiga tabellfelet. Med förhållandevis litet h kanske detta sker redan med två eller tre steg i extrapolationen.

Uppgift 6 ODE

a)

Framåteuler ges av

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), & y_0 = c; \\ x_{i+1} = x_i + h, & x_0 = a. \end{cases}$$

För en diskussion kring att y_0 ger en startpunkt i riktningsfältet och att man från denna startpunkt tar man riktningen givet av f och beräknar en approximation av nästa funktionsvärde i $x_i + 1$.

b)

Vi inför hjälpfunktioner men skriver desssa som u istället för y vilket angavs i uppgiften för att undvika missförstånd.

$$\begin{array}{lcl} u_1 = x & \rightarrow & \dot{u}_1 = \dot{x} = u_2 \\ u_2 = \dot{x} & \rightarrow & \dot{u}_2 = \ddot{x} = (3 - \sin(t) \cdot u_2 + \frac{u_1}{1+u_3^2} \\ u_3 = y & \rightarrow & \dot{u}_3 = \dot{y} = -\cos(t) \cdot u_3 - \frac{u_2}{1+t^2} \end{array}$$

Tillhörande begynnelsevärden ges av:

$$\begin{cases} x(0) = u_1(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = u_2(0) = -1 \\ y(0) = u_3(0) = -4 \end{cases}$$

Standardformen ges av

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \dot{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \mathrm{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

$$\mathrm{f}(t, u) = \begin{bmatrix} u_2 \\ (3 - \sin(t) \cdot u_2 + \frac{u_1}{1+u_3^2} \\ -\cos(t) \cdot u_3 - \frac{u_2}{1+t^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$