UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap

TENTAMEN

Tentamen

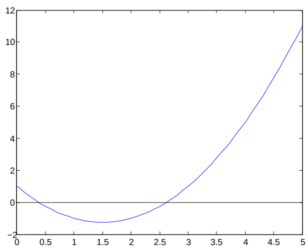
Teknisk-vetenskapliga beräkningar

19 mars 2008

Uppgift 1 (4 p) – *Fixpunktsmetoden*

Givet en fixpunktsfunktion $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, krävs för konvergens att $|\varphi'(x)| < 1$ inom intervallet .

Om $\varphi(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$ är $\varphi'(x) = \frac{2}{3}x$. Vi ser att $|\varphi'(x)| < 1$ för $-1.5 < x < 1.5$. Alltså kan vi inte använda denna fixpunktsmetod för att få konvergens mot den större roten som ligger utanför detta intervall.



Uppgift 2 (2+2 p) – *Newton-Raphson*

a)

Vi söker en rot till $\frac{1}{x^4} + e^{x-100} - 16 = 0$. Newton-Raphson ges av $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + e^{x-100} - 16}{-4x^5 + e^{x-100}}.$$

b)

En bra variant är oftast att använda intervall-halveringsmetoden. I detta fall kan vi dock enkelt få en bra gissning genom att studera funktionen och som fungerar utan tillgång till dator. Termen e^{x-100} kommer inom det givna intervallet att vara väldigt liten. Ett bra startvärde borde alltså ges av

$$\frac{1}{x^4} = 16 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Uppgift 3 (2+4 p) – *Nogrannhetsordning*

a)

Eulers metod har en nogrannhetsordning av 1, d.v.s trunkeringsfelet är av storleksordning $O(h)$. För traptesmetoden gäller nograsnnhetsordning 2, d.v.s trunkeringsfelet är av storleksornind $O(h^2)$.

b)

Vi skriver om formeln $E_T = ch^p$ som $\log_{10}(E_T) = \log_{10}(c) + p \cdot \log_{10}(h)$

Vi får då

$h = 0.01$	$E_T = 10^{-10}$	$\log(10^{-10}) = \log_{10}(c) + p \cdot \log_{10}(0.01)$ $-10 = \log_{10}(c) - 2p$
$h = 0.1$	$E_T = 10^{-3}$	$\log(10^{-3}) = \log_{10}(c) + p \cdot \log_{10}(0.1)$ $-3 = \log_{10}(c) - 1p$
$h = 1$	$E_T = 10^{-2}$	$\log(10^{-2}) = \log_{10}(c) + p \cdot \log_{10}(1)$ $-2 = \log_{10}(c)$

Sätt $x = [\log_{10}(c)\ p]^T$. Vi får

$$Ax = b = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Normalekvationerna $A^T Ax = A^T b$ ger oss

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} -15 \\ 23 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} -15 \\ 8 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

vilket ger $\log_{10}(c) = -1 \Rightarrow c = 0.1$ och $p = 4$.

Uppgift 4 (2+4 p) – *ODE*

Givet differentialekvationsproblemet:

$$y'' - y' + y = x, \qquad y(0.1) = 0.2, \qquad y'(0.1) = 0.3$$

a)

vi sätter $u = [u_1\ u_2]^T$ och $u_1 = y$ och $u_2 = y'$. Detta ger oss

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= x - u_1 + u_2 \end{aligned} \qquad u(0.1) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

b)

Eulers explicita metod ges av $u_{i+1} = u_i + h \cdot f(x_i, u_i)$ och $h = 0.2$, $x_0 = 0.1$ och $u_0 = u(0.1)$. Alltså

$$
\begin{aligned}
u_1 = u(0.3) &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 - 0.2 + 0.3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.04 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.34 \end{bmatrix} \\
u_2 = u(0.5) &= \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.34 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.3 - 0.26 + 0.34 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.34 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.38 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.076 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.328 \\ 0.416 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$y(0.5) = u_1(0.5) = 0.328$

Uppgift 5 (2 p) – *Bestämning av rötter*

Termen $\tan(x)$ har flera singulariteter vilket kan skapa problem med iterativa metoder, men

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Förlängning med $\cos(x)$ ger alltså istället

$$\sin(x) - x\cos(x) = 0$$

Uppgift 6 (1+2+2+1 p) – *Kondition*

Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & \square \end{bmatrix}.$$

a)

Ett lämpligt värde kan vara 1, vilket leder till $2a_2 = a_3$ om a_i är kolumn i i A. Vi ser också att $4a_3 = a_1 - 6a_2$ om istället a_i är rad i i A.

b)

Då rangen av A är två, krävs två linjärt oberoende vektorer för att spänna upp värderummet. Lämpliga vektorer blir då $a_1 = [6\ 3\ -3]^T$ och $a_3 = [4\ 0\ 1]^T$.

c)

Då rang($\mathcal{R}(A)$) $= 2$ är rang($\mathcal{N}(A)$) $= 1$. Det krävs alltså en vektor som är ortogonal mot värderummet till A, d.v.s. en vektor, v, som är vinkelrät mot vektorerna i b) och som då uppfyller $a_i^T v = 0$ för alla kolumner a_i i A. Vi löser $A^T v = 0$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gauselimination ger

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vilket ger $-2x_2+3x_3 = 0$. Låt t.ex $x_2 = 3$ och $x_3 = 2$, vilket i sin tur ger $6x_1+3\cdot3-3\cdot2 = 0$ och därmed $x_1 = -\frac{1}{2}$.

Lämplig vektor är $[-\frac{1}{2}\ 3\ 2]^T$.

d)

Illa-konditionerad blir matrisen om vi har två vektorer som ligger mycket nära varandra. Lämpligt värde kan därför vara 1.00000000001. Jämför med svaret i a).

Ett mycket stort värde ger också en illa-konditionerad matris då rangen på A går mot 1 när värdet går mot inf. Detta är dock ett sämre svar då det bygger på stora skillnader i A, snarare än närliggande vektorer.

Uppgift 7 (2+2 p) – *LU-faktorisering*

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & x & 1 & & \\ & & x & & 1 & \\ & & x & & & 1 \end{bmatrix}$$

Om a_i är rad i i $\hat{A} = M_2 M_1 A$ är x den den skalningsfaktor vi använder så att $xa_3 + a_i$ ger en 0:a i kolumn 3 för $i = 4, 5, 6$.

b)

L ges av $L^{-1} = M_{n-1} \ldots M_2 M_1$, d.v.s. $L = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1}$.

M_i^{-1} ges av M_i där elementen under huvuddiagonalen i kolumn i är negerade. Produkten mellan de olika M^{-1}-matriserna ges av att elementen under huvuddiagonalen summeras. Huvuddiagonalen består av ettor.

Uppgift 8 (2+4+2 p) – *Tabelldata*

a)

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$D(0.4) = (f(1.1) - f(0.3))/0.8 = 1.36/0.8 = 1.70$
$D(0.2) = (f(0.9) - f(0.5))/0.4 = 0.24/0.4 = 0.65$
$D(0.1) = (f(0.8) - f(0.6))/0.2 = 0.10/0.2 = 0.50$

b)

h=0.4	1.70				
		(0.65-1.70)/3 = -0.35			
h=0.2	0.65		0.65 - 0.35 = 0.30		
		(0.50-0.65)/3 = -0.05		(0.45-0.30)/15 = 0.01	
h=0.1	0.50		0.50 - 0.05 = 0.45		0.45+0.01 = 0.46

c)

Då centraldifferansen har en noggrannhetsordning av 2, borde felkorrektionstermen med dubbla steglängden vara ca 4ggr så stor. I detta fallet är den 7 ggr så stor (-0.35/-0.05). Svaret torde alltså bli nej.