UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för Datavetenskap

Februari 2008

# Laboration 3, TVB, VT08 Interpolation samt skattning av integraler

---

## Redovisning

Syftet med att skriva rapport är bland annat att

- Träna på att kommunicera skriftligt
- Visa förmåga att kritiskt granska resultat
- Bättre förstå vad man kan och vad man behöver träna mer på

Därför är det ungefär lika bra att ge fel svar med tydliga resonemang som att ge rätt svar utan att beskriva resonemanget. Att hitta och åtgärda fel blir lättare med en välskriven rapport.

Rapporten förväntas innehålla följande:

- Försättsblad med **namn**, **datum**, **sökväg till källkoden**, samt **användarnamn på alla gruppmedlemmar**
- Väl **förklarade lösningar** på alla ingående deluppgifter
- **Kommenterade resultat** med egna reflektioner och slutsatser
- **Välformaterad källkod** utskriven i fixed-width typsnitt (t.ex. courier)
- Kommentarer om labben: rolig/tråkig, svår/lätt, oklarheter?

Vid komplettering (betyget O) lämnas orginalrapporten in tillsammans med modifierade bitar av rapporten/koden. Ett nytt försättsblad måste skrivas ut.

---

Uppgiften löses enskilt eller i par
och inlämnas senast
**Fredagen den 29 februari 2008 klockan 8:15**

---

Rapporten lämnas i facket, märkt med kursens namn och kurskod, utanför institutionen.

# Del 1 - Att styra en robot[1]

För att styra en robotarm till önskade positioner för att t.ex. plocka upp ett objekt och förflytta det används ofta komplicerade kontrollsystem. Ett av kraven på ett sådant system är att armen ska flyttas från en position till en annan längs en mjuk kurva. Man vill undvika kraftiga knyckar som kan orsaka att objektet ramlar ur greppet, att det skadas eller att armen själv skadas. Därför definieras ett antal punkter där armen ska passera, och interpolation används för att konstruera en kurva längs vilken armen ska röra sig. I regel rör sig robotarmen i tre dimensioner, men i den här uppgiften antar vi att rörelsen sker på en yta. Följande datapunkter har samlats in:

| **Punkt nr.** | **x** | **y** | **Kommentar** |
|---|---|---|---|
| **1** | **0** | **0** | **Start** |
| 2 | 2 | 4 | Passera en sensor som räknar antal operationer |
| 3 | 5 | 5 | Mellanliggande punkt |
| **4** | **7** | **6** | **Plocka upp objekt** |
| 5 | 9 | 8 | Passera över kant |
| 6 | 15 | 1 | Mellanliggande punkt |
| **7** | **17** | **0** | **Sätt ner objekt** |
| 8 | 12 | -2 | Mellanliggande punkt |
| 9 | 4 | -1 | Mellanliggande punkt |
| 10 | 0 | 0 | Tillbaka |

**a)** Rita upp punkterna och sammanbind dem med räta linjer för att få en uppfattning om hur problemet ser ut. Vägen kan delas upp i tre delar: från start till punkt 4 där objektet plockas upp, från punkt 4 till punkt 7 där objektet sätts ner, och från punkt 7 tillbaka till ursprungläget. Varför är det lämpligt att dela upp vägen på detta sätt?

**b)** Använd interpolation för att beräkna en lämplig färdväg för robotarmen. Dela upp vägen i tre delar enligt ovan och interpolera varje del med ett tredjegradspolynom. Redovisa polynomen och koefficienterna samt plotta resultatet tillsammans med punkterna. Det är tillåtet att använda Matlabs inbyggda funktioner för interpolation men ange då kortfattat hur den valda funktionen fungerar.

**c)** Hur kan man i denna tillämpning använda kubiska splines? Kan det finnas lämpligare sätt att dela upp vägen än uppdelningen som användes i b)? Implementera ditt förslag och plotta resulterande kurva. Har denna kurva några uppenbara fördelar jämfört med tredjegradspolynomet i förra uppgiften? Tips: Använd `spline` i Matlab.

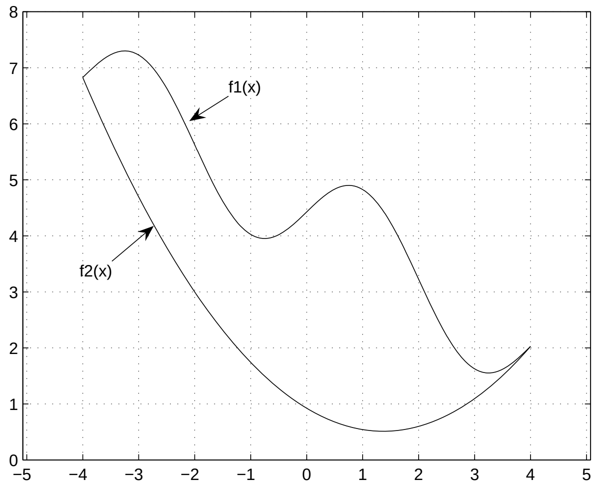
**d)** Skulle det vara ett bra alternativ att minsta-kvadrat-anpassa punkterna 1-7 till t.ex. ett tredjegradspolynom i stället? Varför/varför inte? Du behöver inte göra approximationen, bara resonera kring hur resultatet skulle skilja sig från det du har nu.

[1] Delar av denna uppgift är tagna ur Engineering problem solving with MATLAB, 2nd ed., Dolores M. Etter.

# Del 2 - Skattning av integraler

Både derivator och integraler kan numeriskt skattas med metoder som bygger på lokal linjärisering av den analytiska funktionen. Richardsonextrapolation, som används för att ytterligare reducera modellfelet, visas här i samband med skattning av integraler, men kan användas på precis samma sätt vid skattning av bl.a. derivator. I denna uppgift ska du/ni använda numerisk integration för att bl. a. bestämma tyngdpunkten hos en kropp.

En skulptör vill konstruera en "balansakt" och sätta upp den på ett stöd. För att stödet ska kunna göras litet och smäckert behöver man finna kroppens horisontalkomponent av tyngdpunkten. Stödet fästes sedan rakt under tyngdpunkten så att figuren balanserar på stödet. Eftersom materialet är väldigt dyrbart vill skulptören inte prova sig fram, utan ber dig om hjälp. Skulpturen, som är platt, ser ut på följande sätt:




Figurens övre rand bestäms av funktionen $f_1(x)$ och den undre randen bestäms av $f_2(x)$ där $-4 \le x \le 4$ (enheten är meter, så det är en *stor* balansakt).

$$f_1(x) = \sin \frac{\pi}{2} x - 0.6x + 4.4267$$

$$f_2(x) = 0.2189x^2 - 0.6x + 0.9243$$

Tyngdpunktens $x$-komponent kan beräknas med formeln

$$x_p = \frac{\int_{-4}^{4} x\,(f_1(x) - f_2(x))\,dx}{\int_{-4}^{4} (f_1(x) - f_2(x))\,dx}.$$

Vi ska nu använda Matlab för att beräkna $x_p$ med en noggrannhet av $\pm$5mm.

**a)** Implementera två funktioner `talj` och `namn` som beräknar täljaren och nämnarens integrander, respektive (dvs de ska beräkna $x\,(f_1(x) - f_2(x))$ samt $f_1(x) - f_2(x)$). Dessa ska klara av att indatat `x` är en vektor. Gör nu en första approximation av $x_p$ genom att mha dessa filer använda trapetsformeln för att beräkna integralerna. Räkna med 10 resp. 20 delintervall. Plotta också funktionerna `telj` och `namn`, ändpunkterna i delintervallen och de polygontåg som utgör approximationen av funktionerna. Tips: Matlabfunktionen `trapz` som implementerar trapetsmetoden.

**b)** Använd nu trapetsmetoden[2] (förslagsvis genom funktionen `trapz`) för att ta fram en skattning som ligger inom feltoleransen (dvs $\pm$5mm). Trapetsmetoden har noggrannhetsordning 2 och felet kan skattas förutsatt att trunkeringsfelet är det dominerande felet (dvs att ni kan påvisa regelbundenhet). Eftersom $x_p$ är en funktion av två integraler så ska ni använda er av *allmänna felfortplantningsformeln* för att utifrån de två felskattningarna på de ingående integralerna skatta felet i $x_p$.

**c)** Redovisa en plot liknande bilden ovan där du ritat in en lodrät linje som symboliserar stödet med din beräknade $x_p$ som $x$-koordinat.

**d)** Prova också att använda matlabs egna lösare `quadl`. Här bestäms toleransen med ett argument till funktionen och frågan är nu vilka toleranser ni ska välja för att garantera att ni får korrekt noggrannhet i det slutgiltiga $x_p$. Använd er utav felfortplantningsformeln ni tagit fram i en tidigare deluppgift och gör kvalificerade skattningar av lämpliga toleranser till `quadl`. Redovisa noga hur ni gått tillväga. Hur många evalueringar av `telj` och `namn` krävdes av `quadl` för att få den önskade noggrannheten på 5mm?

[2] Se sidan 175f i kursboken