Grupptimme 5

Teknisk vetenskapliga beräkningar, VT08

Översikt och övningsuppgifter

Kondition av ekvationssystem

Ekvationssystemet Ax = b ska lösas där A är en tridiagonal matris:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9.6 \\ -3.7 \\ 1.1 \\ -1.2 \\ 2.0 \\ -1.9 \end{bmatrix}$$

Lös systemet för hand eller med hjälp av matlab. Vi vill avgöra hur tillförlitlig den erhållna lösningsvektorn x är, då vi vet att högerledets komponenter är korrekt avrundade till en decimal. Undersökningen görs experimentellt med några olika störningar i b-vektorn:

$$b_1 = b + \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.05 \\ -0.05 \\ 0.05 \\ -0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad b_2 = b + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ -0.05 \\ -0.05 \\ -0.05 \end{bmatrix} \quad b3 = b + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ -0.05 \\ -0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Vilket av störningsexperimenten ger största förändring i lösningsvektorn? Beräkna det experimentellt erhållna konditionstalet för det värsta fallet. Ber äkna även det teoretiska konditionstalet.

Icke-linjära Ekvationer

a)

Ekvationen $a^x = x^a$ har alltid en trivial rot $x = a$ och en annan rot. För t ex $a = 2$ blir den $x = 4$. Bestäm med sju korrekta decimaler den icketriviala lösningen för $a = 3$: Använd Newton-Raphsons metod efter lämplig omskrivning. Om a inte är exakt tre utan snarare 3.00 ± 0.005, hur stor är osäkerheten i x-värdet? För vilket a-värde finns bara roten $x = a$?

b)

På avståndet en meter från en vägg finns en två meter hög mur. En fem meter lång stege lutas över muren mot väggen så att stegen nuddar muren. På vilken höjd H stöder stegen mot väggen? Rita för hand en figur och härled ekvationen $H^2 + H^2/(H-2)^2 = 25$ Skriv ekvationen som en polynomekvation $P(H) = 0$ och beräkna rötterna till den (t ex med matlabs `roots`). Vilken eller vilka lösningar är rimliga?

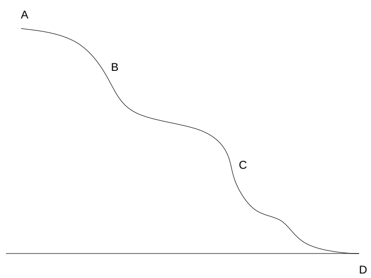
c)

Figge har löst en viss ekvation med fixpunktsiteration och successivt fått värdena: 1.0000, 2.1314, 3.0365, 3.7605, 4.3398, 4.8032, 5.1739, 5.4705, som han tror konvergerar mot en rot. Om denna förmodan är sann, ungefär hur många ytterligare iterationer krävs för att få tre korrekta decimaler i svaret om vi antar att ursprungsfelet var ca 5.5?

Approximation

a)

Man vill bestämma fallhöjder i en vattenrutschbana enligt figuren och har därför satt ut fyra punkter A-D längs banan. Därefter mäts höjdskillnader mellan några punktpar, och följande resultat erhålls:



$$
\begin{aligned}
H_A - H_D &= 5.9,\\
H_A - H_B &= 1.16,\\
H_B - H_D &= 4.80,\\
H_B - H_C &= 3.17,\\
H_C - H_D &= 1.73,\\
H_A - H_C &= 4.25.
\end{aligned}
$$

H_A, H_B, osv, betyder höjden (över havet) för punkten A, B, ... Det gäller att beräkna hur högt punkterna A, B och C ligger över bassängens vattenyta där punkten D är belägen. Om man tittar närmare på de sex mätvärdena ser man att de måste vara behäftade med fel. Använd samtliga mätvärden för att bestämma de tre höjdvärdena.

b)

En modell för befolkningsutvecklingen på jorden ges av $dB/dT = K_F B^2$, där B är världsbefolkningen, T är tiden och K_F är en så kallad fertilitetskonstant. Denna differentialekvation löses lätt:

$$B = \frac{1}{KF} \cdot \frac{1}{T_0 - T}$$

. Ur Herzler, Crisis in World Population och Statistisk årsbok hämtar vi följande befolkningsstatistik:

T (år)	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1920	1940	1960
B (milj)	545	623	728	906	1171	1608	1834	2295	3003

Formulera ett linjärt ersättningsproblem och bestäm K_F och T_0 med minstakvadratmetoden. Vilken innebörd har T_0? Extrapolera till innevarande år. Hur väl stämmer modellen? Vad ger modellen för T-värde då $B = 2$ (Adam och Eva)?

1 Integraler

Trapetsregeln med steglängderna 1.6, 0.8, 0.4, 0.2 har använts för att ber äkna

$$\int_0^{1.6} \ln(2 + \cos(16t))dt$$

och givit värdena 1.7287, 1.7359, 1.7378, 0.8964.

Plotta integrandkurvan och ge en förklaring till de erhållna resultaten.