Gruppövning 4

- Interpolation
- Numerisk behandling av derivator

OBS1 : Runges fenomen
OBS2 : Division med små tal

Interpolation handlar om att på ett så bra sätt som möjligt transformera diskret information till approximativ kontinuerlig dito. Antag att man vid ett fysikaliskt experiment mäter en storhet vid olika tidpunkter. Man får således diskreta punkter b_i som vid tidpunkterna τ_i anger värdet för den studerade storheten. Antag nu att vi inte nöjer oss med att enbart veta storhetens värde för punkterna $i = 1, \ldots, N$, utan att vi vill veta storhetens värde för en godtycklig punkt. Detta kan vi göra med interpolation, dvs mha av den diskreta informationen $[\tau_i, b_i]$ bilda en kontinuerlig funktion $g(t)$ som på ett mer eller mindre bra sätt beskriver storheten i en godtycklig punkt t.

Valet av funktionen $g(t)$ baseras på kunskaper om den studerade storhetens egenskaper. Man börjar med att välja funktionens stuktur, tex ett andragradspolynom enligt $g(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$, men för att $g(t)$ till fullo ska beskriva den studerade storheten måste den valda modellen $g(t)$ anpassas till de givna datapunkterna $[\tau_i, b_i]$. Valet av struktur för funktionen $g(t)$ är ofta inte trivialt och det har stor betydelse för hur bra den beräknade kontinuerliga approximationen $g(t)$ beskriver den studerade storheten. Ofta ansätts emellertid $g(t)$ som någon form av polynom, tex ett tredjegrads- eller ett styckvist polynom. Splines är ett speciellt val av polynomansats för $g(t)$ och fördelen med denna är att $g(t)$ utan problem blir flera ggr kontinuerligt deriverbar. I en dimension jobbar vi med att anpassa kurvor och i två med att anpassa ytor till givna datapunkter.

• Interpolation i 1 dimension

Uppgift 1: Vi börjar med att studera interpolation i en dimension. Denna uppgift är hämtad från ett häfte med experiment med numeriska metoder i Matlab utgivet av NADA på KTH. Uppgiften går ut på att anpassa en "rutschbana" till sex givna punkter $[\tau_i, b_i]$ där

$$\tau = [0.5, 1.5, 2.5, 3, 4, 5]^T \qquad \mathbf{b} = [3, 1.5, 1.5, 1, 1, 0]^T$$

Ni skall göra en serie olika polynomanpassningar till dessa data och plotta resultaten. Det kan vara lämpligt att använda `axis equal`. För att beräkna koefficienterna till ett interpolationspolynom av ordning n används `p = polyfit(tau, b, n)` och man kan sedan göra en plot av sitt polynom med Matlab-koden

```
tvek=tmin:0.01:tmax;
gvek=polyval(p,tvek);
plot(tau,b,'o',tvek,gvek)
```

Om man har flera interpolationspolynom får man ha en uppsättning `tvek` och `gvek` för varje polynom, och sedan göra

$$\texttt{plot(tau, b,}' \texttt{o}' \texttt{, tvek1, gvek1, tvek2, bvek2,} \ldots);$$

För att beräkna och plotta en kubisk splinefunktion kan Matlab-funktionen `interp1` användas. Använd `help` för att få en mer utförlig beskrivning av `polyfit`, `polyval` samt `interp1`.

Gör nu följande polynomanpassningar.

a: Ett andragradspolynom genom punkterna 1-3 och ett tredjegradspolynom genom punkterna 3-6.

b: Ett tredjegradspolynom genom punkterna 1-4 och ett andragradspolynom genom punkterna 4-6.

c: Ett femtegradspolynom genom punkterna 1-6.

d: Kubiska splines med $P_s''(\tau_1) = P_s''(\tau_6) = 0$ (default med funktionen `interp1`). I detta fall har $P_s(t)$, istället för $g(t)$, valts som beteckning för den valda modellen för att förtydliga att det är ett Splines-polynom.

e: Kubiska splines med $P_s'(\tau_1) = P_s'(\tau_6) = 0$ (för att inte ungarna ska dråsa i backen). Tips: se `help spline`.

Truls och Trula bor emellertid med sina barn i Helsingborg och vill därför att rutschbanan placeras där. Eftersom origo är beläget i Lund leder detta till nya τ-koordinater.

f: Gör om uppgift 1.c med $\tau_H = 50000 + [0.5, 1.5, 2.5, 3, 4, 5]'$; (dvs anpassa ett femtegradspolynom till τ_H). Hur stor kan "avståndstermen" vara för att man skall erhålla en någorlunda vettig lösning?

g: Förklara utseendet hos kurvan i uppgift 1.f.

h: Matrisen A kan erhållas med `A = vander(`τ`)`; Gör detta för τ och τ_H och jämför konditionstalen för de resulterande matriserna (`cond(A)`).

• Numerisk skattning av derivator

Uppgift 2: Nu övergår vi till att studera hur derivataskattningar kan påverkas av valet av h. En typ av derivataskattning är den sk centraldifferensen som kan användas för att numeriskt uppskatta derivatan för funktionen $f(t)$ i punkten $t = a$.

$$D(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Använd detta uttryck för att approximera $f'(t) = cos(t)$ för ett inläst värde $t = a$ och låt vidare $\texttt{h} = \texttt{logspace}(-\texttt{1}, -\texttt{16}, \texttt{16})$. Plotta $|D(h) - f'(a)|$ för olika värden på h. Kommentera resultatet.

• Flera uppgifter

I kapitel 5 i det vita övningshäftet (av Pohl mfl) finns flera uppgifter att jobba vidare med.

Överkursuppgift: Interpolation i 2 dimensioner

a: Börja med att göra kommandona `clear; clf;` i Matlab följt av `peaks`. Den funktion som då plottas är enligt nedan

$$f(s,t) = 3(1-s)^2 e^{-s^2-(t+1)^2} - 10(s/5 - s^3 - t^5)e^{-s^2-t^2} - \frac{1}{3}e^{-(s+1)^2-t^2}$$

där x på x-axeln motsvarar vårt s och y t (fast detta kan ni enkelt ändra mha `xlabel` och `ylabel`). Användningen av kommandot `grid` kan ytterligare förtydliga den grafiska informationen.

b: För att se hur denna kod ser ut kan kommandona `which peaks, path` i kombination med `cd` användas. Det är nu möjligt att öppna filen `peaks.m` och se hur den ser ut. Detta borde bla visa hur ni kan använda kommandona `meshgrid` och `surf` för att plotta funktionen $f(s,t)$.

c: Beräkna nu $f(s,t)$ värde i punkterna $\sigma = [-2; 0; 2]$ och $\tau = [-2; 0; 2]$ (dvs ett rutnät med punkterna (-2,2), (-2,0), (-2,-2), (0,2), (0,0), (0,-2), (2,2), (2,0), (2,-2)).

d: Interpolera sedan denna diskreta informationsmängd mha Matlabs `interp2`. Gör därför till att börja med `help interp2` för att få mera info. Använd därefter denna Matlabfunktion för att, baserad på den diskreta informationen τ och σ, beräkna en kontinuerlig approximation $g(s,t)$ till $f(s,t)$.

e: Plotta de diskreta punkterna (kan tex göras med `plot3`) och approximationen $g(s,t)$ i en plot och den exakta funktionen $f(s,t)$ i en annan (kan tex göras mha Matlabkommandot `subplot`).

f: Tycker ni att $g(s,t)$ är en bra approximation till $f(s,t)$?