Begynnelseproblem för ODE

Standardform:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t) \quad t > 0 \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0 \end{aligned}$$

Obs, vektorkvation!

$$\begin{aligned} u_1' &= f_1(\boldsymbol{u}, t) \qquad t > 0 \\ u_2' &= f_2(\boldsymbol{u}, t) \qquad t > 0 \\ &\vdots \\ u_n' &= f_2(\boldsymbol{u}, t) \qquad t > 0 \end{aligned}$$

$$u_1(0) = u_{10}, \quad u_2(0) = u_{20}, \quad \dots \quad , \quad u_n(0) = u_{n0}$$

Stabilitet m a p begynnelsevärden

Vad händer om man stör begynnelsevärden?

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\epsilon' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_\epsilon, t) \quad t > 0 \\ \boldsymbol{u}_\epsilon(0) &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Är lösningen $\boldsymbol{u}_\epsilon$ känslig för ändringar i begynnelsedata?

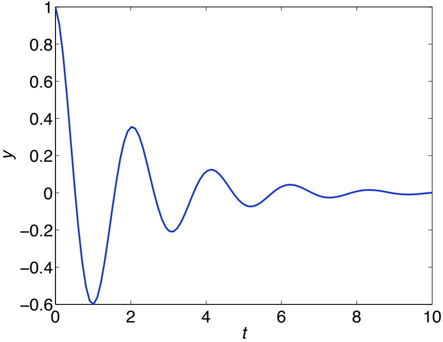
Begynnelsevärdesproblem

Exempel 1

$$y' = \lambda y \qquad t > 0$$
$$y(0) = y_0$$

Har lösningen $y(t) = y_0 e^{\lambda t} = y_0 e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}(\cos \mathrm{Im}\,\lambda t + \mathrm{i} \sin \mathrm{Im}\,\lambda t)$

- **Stabil** om $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$
- **Asymptotisk stabil** om $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$
- **Instabil** om $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$



Begynnelsevärdesproblem

Exempel 2 Linjärt system av ODE:r

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} \qquad t > 0 \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{aligned}$$

$\lambda_1, \ldots \lambda_n$: matris $\boldsymbol{A}$:s egenvärden
$\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n$:motsvarande egenvektorer
Om matrisen är *diagonaliserbar* är egenvektorerna linjärt oberoende
Då kan man skriva $\boldsymbol{y}_0 = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \boldsymbol{v}_k$ och lösningen är
$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t} \mu_k \boldsymbol{v}_k$

Systemet är

- **Stabilt** om $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$ för alla k
- **Instabilt** om $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ för något k

Begynnelsevärdesproblem

Exempel 3

$$\begin{cases} h' = \left[c_1 \left(1 - \frac{h}{M}\right) - d_1 r\right] \\ r' = (-c_2 + d_2 h) r \end{cases} \qquad t > 0$$

$$\begin{cases} h(0) = h_0 \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

h: "harar", "r": rävar
$c_1, c_2, d_1, d_2, M \geq 0$

- Icke-linjärt system
- Går inte att lösa "analytiskt"

Begynnelsevärdesproblem

Exempel 4

Newton's 2:a lag i en dimension: f = m a (kraft är massan gånger accelerationen), en ODE av ordning 2:

$$f = mx''$$

Genom att införa $p = mx'$, kan man skriva detta som ett system av två ekvationer i standardformen

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b},$$

där

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$