Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström (e-post wikstrom)

# Omtentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar 1
för
DV & TDV

**Tentamensdatum:** 2003-08-29

**Skrivtid:** 9-15

**Hjälpmedel:** inga (förutom penna och linjal)

Om problembeskrivningen i något fall är oklar, bestäm dig för en rimlig tolkning och anteckna den vid lösningen.

Börja varje uppgift på ett nytt blad. Skriv ditt namn och uppgiftens nummer uppe till höger på varje blad.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Lycka Till!

## Uppgift 1: (2+3 p)

**a:** I samband med datorbaserade beräkningar uppstår olika typer av fel. Redogör för teoretisk samt experimentell felkalkyl i detta sammanhang samt minst en begränsning för vardera.

**b:** Följande linjära ekvationssystem $Ax = b$ är givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Följande grundbegrepp; linjärt oberoende basvektorer, rang och residual är viktiga för att kunna beskriva problemklassen i fråga. Beskriv, med hjälp av $A, x$ och $b$, dessa grundbegrepp. Motivera utförligt ditt svar.

## Uppgift 2: (2+4 p)

**a)** Sekantmetoden är en iterativ metod enligt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

för lösning av $f(x) = 0, f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$. Nämn minst två betydelsefulla begränsningar som denna metod har.

**b)** Du står inför problemet att lösa $f(x) = 0, f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ då $f(x) = x - e^{-x}$ i intervallet $0 \le x \le 1$. Den föreslagna algoritmen för fixpunktsiteration är

$$x_{k+1} = x_k + e^{-2x_k} - x_k^2$$

Gör en analys baserad på teoretiska konvergensvillkor för att utreda lämpligheten i att använda den föreslagna algoritmen för att beräkna samtliga rötter i det angivna intervallet. Är den föreslagna algoritmen lämplig att använda i denna situation? Motivera noggrant ditt ställningstagande.

## Uppgift 3: (3+2+2 p)

En formel för att ur vindstyrka och temperatur beräkna den upplevda temperaturen är Siples vindavkylningsformel. Vid $33^oC$ har vinden ingen avkylande effekt på huden så därför ansatte Siple formeln

$$T_{hud} = 33 - (a + bv + c\sqrt{v})(33 - T) \qquad (1)$$

där $v$ är vindstyrkan i m/s och $T$ är temperaturen i grader Celcius.
Följande mätvärden vid $T = 0$ finns tillgängliga.

| $v$ | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_{hud}$ | 0 | $-7.5$ | $-12$ | $-14.5$ | $-16.5$ |

**a:** Formulera det överbestämda ekvationssystem som erhålles då man med minsta kvadratmetoden vill bestämma $a$, $b$ och $c$. Anpassa i minstakvadrat mening den linjära matematiska modellen (1) till de givna mätdata. Med lämpligt val av beteckningar resulterar detta i ett linjärt ekvationssystem enligt $Ax \approx b$. Du behöver inte räkna ut $x$, utan det räcker med att du anger motsvarande $A, x$ och $b$.

**b:** Formulera normalekvationerna svarande mot problemet i a) samt <u>motivera</u> varför de ger lösningen till motsvarande linjära minsta kvadratproblem i det fall då matrisen $A$ har full rang.

**c:** Vi har i detta fall mera information än obekanta vilket resulterar i approximationsproblemet $Ax \approx b$. Ett alternativ i detta fall är interpolation. Välj ut relevant information och formulera problemet istället som ett interpolationsproblem. Nämn en stor skillnad mellan approximations- resp interpolationsproblemet.

## Uppgift 4: (2+4+1 p)

**a)** Beskriv Rombergs metod samt adaptiva metoder (i fallet med lösning av integraler).

**b)** Förstaderivator kan, för ett fixt $x$, beräknas numeriskt med följande formel

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{6}f(x+2h) + f(x+h) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{3}f(x-h)}{h} + D(h)$$

Använd Taylorutvecklingen för att bestämma trunkationsfelet i $D(h)$ som en potensserie i $h$.

**c)** Antag att beloppet av det absoluta felet i beräkning av $f(x)$, för ett godtyckligt $x$, begränsas av $\epsilon > 0$. Vilken blir den övre gränsen för beräkningsfelet i $D(h)$?

## Uppgift 5: (4+2 p)

**a)** Utgå från

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & y(t_0) = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

för att på ett illustrativt sätt beskriva vad som menas med lokalt och globalt trunkeringsfel, noggrannhetsordningen $p$ för en metod samt sk flerstegsmetoder i samband med ordinära differentialekvationer (ODE).

**b)** Givet är följande ODE

$$\ddot{y} + 2t\dot{y} + y^2 = 0, \qquad y(0.3) = 0.1, \;\; \dot{y}(0.3) = 0.2$$

där $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Du ska inte lösa differentialekvationssystemet utan bara ställa upp det på formen $\frac{dy}{dt} = f(y, t), \; y(t_0) = y_0$ där det klart och tydligt ska framgå vilka element vektorerna $\frac{dy}{dt}, f, y$ och $y_0$ har.