Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström (e-post wikstrom)

Tentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar 1
för
DV & TDV

Tentamensdatum: 2003-06-06

Skrivtid: 9-15

Hjälpmedel: inga (förutom penna och linjal)

Om problembeskrivningen i något fall är oklar, bestäm dig för en rimlig tolkning och anteckna den vid lösningen.

Börja varje uppgift på ett nytt blad. Skriv ditt namn och uppgiftens nummer uppe till höger på varje blad.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Lycka Till!

Uppgift 1: (2+3 p)

a: I samband med datorbaserade beräkningar uppstår olika typer av fel. Redogör för teoretisk samt experimentell felkalkyl i detta sammanhang samt minst en begränsning för vardera.

b: Följande linjära ekvationssystem $Ax = b$ är givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vilken rang har matrisen A? Vad kan därmed sägas om lösningen x vad gäller existens och entydighet? Motivera utförligt ditt svar.

Uppgift 2: (3+6 p)

a) Denna deluppgift behandlar icke-linjära ekvationer och går ut på att du ska göra en översikt, map vissa faktorer, över några metoder enligt tabellen nedan

faktor	Intervallhalveringsmetoden	Sekantmetoden	Newton-Raphson
typ av info om f			
konvergensordning			
startgissningar			

Lämpligen skriver du av denna tabell och anpassar den så att du får plats med dina svar. Den första faktorn, typ av info om f, avser vilken typ av information om funktionen f som respektive metod behöver för att lösa problemet $f(x) = 0$. Den andra faktorn, konvergensordning, avser hur snabbt respektive metod konvergerar (under förutsättning att man har konvergens och är nära roten). Faktorn startgissningar, slutligen, avser hur många startgissningar som respektive metod behöver.

OBS: Du behöver inte fylla i hela tabellen för att få full poäng utan för att få maxpoäng krävs **minst** att du korrekt redogör för två faktorer.

b) Du står inför problemet att lösa $f(x) = 0, f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ då $f(x) = 3x - x^2 - 1$ i intervallet $0 \leq x \leq 3$. Den föreslagna algoritmen för fixpunktsiteration är

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}({x_k}^2 + 1)$$

Gör en analys baserad på teoretiska konvergensvillkor för att utreda lämpligheten i att använda den föreslagna algoritmen för att beräkna samtliga rötter i det angivna intervallet. Är den föreslagna algoritmen lämplig att använda i denna situation? Motivera noggrant ditt ställningstagande.

Uppgift 3: (2+5 p)

a) Antag att n tabellvärden är givna, dvs $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$. Det förutsätts att x-värdena är ordnade i växande följd) och att $f(x)$ har n kontinuerliga derivator i intervallet $x_1 \leq x \leq x_n$. Antag vidare att $P(x)$ är ett polynom av grad högst $n-1$ samt att $P(x_i) = f(x_i)$. Trunkationsfelet kan då skrivas

$$e_{trunk} = P(x) - f(x) = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \qquad (1)$$

där ξ är något tal i intervallet $x_1 \leq x \leq x_n$.

Ge en intuitiv förklaring till utseendet på feluppskattningen (1) ovan.

b) Ett antal mätvärden (x_i, y_i) enligt

x_i	4	5	2	-5	-2
y_i	-3	1	5	4	-4

ligger nästan på en cirkel och är jämnt fördelade. Man vill bestämma centrumpunkten (x_c, y_c) och radien R för den okända cirkeln som beskrivs av modellen

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Den icke-linjära modellen (2) ovan kan skrivas om till en linjär modell enligt

$$2xx_c + 2yy_c - \rho = x^2 + y^2 \qquad (3)$$

i) Visa hur omskrivning från (2) till (3) kan göras och ange uttrycket för ρ.

ii) **Obs!** Uppgift 3.b.ii kräver inte 3.b.i. Anpassa i minstakvadrat mening den linjära matematiska modellen (3) till de givna mätdata. Med lämpligt val av beteckningar resulterar detta i ett linjärt ekvationssystem enligt $Ax \approx b$. Du behöver inte räkna ut x, utan det räcker med att du anger motsvarande A, x och b.

Uppgift 4: (4+7 p)

a) Betrakta problemet att beräkna integralerna nedan numeriskt

$$I_1 = \int_0^5 f_1(t)dt \qquad\qquad I_2 = \int_1^\infty f_2(t)dt$$

där integranden $f_1(t)$ är lika med ∞ för $t = 0$ och $f_2(t) < \infty$.

Beskriv principiellt hur man hanterar denna typ av integraler numeriskt. Ni ska alltså inte räkna något utan bara beskriva.

b) Vi vill numeriskt beräkna $\int_a^b f(t)\,dt$. Trapetsmetoden ska användas och för trunkationsfelet gäller i detta fall $c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \ldots$ (där c_i är oberoende av h).

Teckna det uttryck som bestämmer en approximation $T1$ mha Trapetsmetoden och steglängden h_1. Du ska alltså inte räkna ut värdet utan det antas vara givet som $T1$. Låt vidare $T2$ beteckna det värde man får då man räknar med Trapetsmetoden och steglängd $h_2 = h_1/2$.

Låt $T3$ på motsvarande sätt beteckna det värde man får då man räknar med steglängden $h_3 = h_2/2$ och slutligen låt $T4$ motsvara steglängden $h_4 = h_3/2$.

Skriv ned det Richardsonextrapolations schema man får då T_i, $i = 1, \ldots 4$ används. Inför lämpliga beteckningar på de kvantiteter som beräknas. Det ska klart framgå hur schemat byggs upp. Redogör även för hur man uppskattar E_{trunk} och E_{tab}. Trunkationsfelet betecknas med E_{trunk} och felet, pga osäkerhet i vid beräkningen av f, med E_{tab}.

Uppgift 5: (2+6 p)

a) Använd begreppet riktningsfält för ODE samt

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & y(t_0) = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

för att på ett lämpligt sätt beskriva vad som menas med väl/illakonditionerade problem och stabila/instabila algoritmer i samband med ordinära differential ekvationer (ODE).

b) En klots som glider längs ett lutande plan påverkas av luftmotstånd och gravitation. Ekvationen för dess rörelse i planets nedförsriktning i y-led blir

$$m\ddot{y} = mg\,sin(\alpha) - mg\mu\,cos(\alpha) - c\dot{y}^2, \qquad\qquad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0.$$

där m, α, μ, g och c alla är givna konstanter (dvs de beror ej av t) och $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Du ska inte lösa differentialekvationssystemet utan bara ställa upp det på formen $\frac{dy}{dt} = f(y, t),\ y(t_0) = y_0$ där det klart och tydligt ska framgå vilka element vektorerna $\frac{dy}{dt}, f, y$ och y_0 har.

Tips: Dividera med m.