Umeå Universitet
Institutionen för Datavetenskap
Gunilla Wikström (e-post wikstrom)

Tentamen

i

Teknisk-Vetenskapliga Beräkningar 1
för
DV & TDV

Tentamensdatum: 2003-06-03

Skrivtid: 9-15

Hjälpmedel: inga (förutom penna och linjal)

Om problembeskrivningen i något fall är oklar, bestäm dig för en rimlig tolkning och anteckna den vid lösningen.

Börja varje uppgift på ett nytt blad. Skriv ditt namn och uppgiftens nummer uppe till höger på varje blad.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Lycka Till!

Uppgift 1: (3+2+3 p)

a: Denna deluppgift innebär att du ska jämföra de linjära ekvationssystemen $Ax = b, A \in R^{n\times n}$ och $Ax \approx b, A \in R^{m\times n}$ $(m > n)$ med varandra samt redogöra för vissa centrala begrepp och egenskaper. Matriserna A antas ha full kolumnrang.
Beskriv i ord och bild skillnaden mellan de två typerna av ekvationssystem i fallet $n = 2$ och $m = 3$. Figuren ska tydligt visa hur A's värderum, residualen samt vektorn b förhåller sig till varandra.

b: Linjära ekvationssystem kan lösas med hjälp av olika metoder, tex LU- eller QR-faktorisering. Beskriv kort minst två olika sätt att bestämma algoritmers effektivitet i detta fall.

c: Denna deluppgift behandlar felanalys och i detta sammanhang de två mycket centrala begreppen kondition och stabilitet

Redogör med hjälp av koefficientmatriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

skillnaden mellan ett illakonditionerat problem och en instabil algoritm.

Uppgift 2: (3+2+3 p)

Du står inför problemet att lösa $f(x) = 0, f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ då $f(x) = x^2 - x - 2$. Två fixpunktsiterationsalgoritmer är föreslagna enligt

Algoritm 1:	Algoritm 2:
$x_{k+1} = 1 + \frac{2}{x_k}$	$x_{k+1} = {x_k}^2 - 2$

Vilken algoritm väljer du för att lösa problemet? Basera ditt val på teoretiska konvergensvillkor och motivera noggrant ditt val.

Tips: Plotta $f(x)$ för att grovlokalisera rötterna.

b) Studera fixpunktsiterationsformeln $x_{n+1} = \Phi(x_n)$. Antag att $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Konvergensordningen för denna talföljd $\{x_n\}$ sägs ha ordning r om det gäller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^r} = K \neq 0.$$

Hur kan man experimentellt uppskatta K för en fixpunktsiterationsformel då man vet att följden har linjär konvergens?

c) Antag att du vid användning av den valda fixpunktsformeln fått resultatet $\tilde{x}$. Redogör för hur du med hjälp av metodoberoende felskattning kan få information om hur noggran $\tilde{x}$ är.

Uppgift 3: (2+5 p)

a) Man försöker approximera funktionen $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$ med ett polynom genom ekvidistant placerade punkter på intervallet $-1 \leq t \leq 1$. Resultatet av denna interpolation finns grafiskt återgivet i Bilaga 1. Vilken är förklaringen till att de valda basfunktionerna $\phi_i(t) = t^{i-1}$ ger upphov till det grafiska resultatet i Bilaga 1? Föreslå minst en åtgärd för att undvika denna typ av numeriska problem.

b) Vid analys av en naturvetenskaplig process med utdata $f(t)$, där t är tiden, erhölls följande mätdatapunkter

t_i	0	3	4	7	8.5
b_i	1	3	3	2	1

Man vill anpassa den matematiska modellen

$$g(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 + x_5 t^4$$

till de ovan givna datapunkterna. Ange det A och b du då får och avgör huruvida det i denna deluppgift är frågan om interpolation eller approximation? Motivera utförligt ditt val. Du ska inte explicit räkna ut vektorn x utan bara ange det aktuella ekvationssystemets koefficientmatris A och högerledsvektorn b.

Uppgift 4: (2+6 p)

a) Beskriv Rombergs metod samt adaptiva metoder (i fallet med lösning av integraler).

b) Bestäm koefficienterna a_1, a_2, a_3 och a_4 så att formeln nedan kan (för ett fixt x) användas för numerisk beräkning av första derivatan och där trunkationsfelet $D(h)$ börjar med $c_1\, h^3$ (c_1 oberoende av h)

$$f'(x) = \frac{a_1 f(x+2h) + a_2 f(x+h) + a_3 f(x) + a_4 f(x-h)}{h} + D(h)$$

Tips: Bestäm a_1, a_2, a_3 och a_4 så att termerna före $f(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ alla blir 0.

Uppgift 5: (3+6 p)

a) Redogör för Eulers explicita och implicita metoder för lösning av ODE och ange minst två grundläggande skillnader de emellan.

b) Enligt Newtons gravitationslag påverkar solen en planet med en kraft som är riktad mot solen och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet. När man delar upp kraften längs koordinataxlarna i ett fixt $x-y$-system med solen i origo få man därför (om man valt lämpliga enheter) följande system av begynnelsevärdesproblem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{cos\phi}{r^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{sin\phi}{r^2}$$

där ϕ är vinkeln mellan positiva x-axeln och ortsvektorn r är avståndet från origo till planeten.

Skriv om differentialekvationerna för de oberoende variablerna x och y till ett system av första ordningens differentialekvationer. Det gäller alltså bland annat att skriva högerleden som funktioner av x och y. Vidare gäller att $r = 1, \frac{dr}{dt} = 0, \phi = 0, \frac{d\phi}{dt} = 1.4$ Dessa begynnelsevärden måste översättas till begynnelsevärden för $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$. Du ska **inte** lösa differentialekvationssystemet utan bara ställa upp det på formen $\frac{dy}{dt} = f(y, t),\ y(t_0) = y_0$ där det klart och tydligt ska framgå vilka element vektorerna $\frac{dy}{dt}, f, y$ och y_0 har.

Tips: $x = r\, cos\phi$, $y = r\, sin\phi$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Observera att det kan vara lite knepigt att bestämma y_0.

Bilaga 1, komplement till uppgift 3.a

Man försöker approximera funktionen $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$ med ett polynom genom ekvidistant placerade punkter på intervallet $-1 \leq t \leq 1$. Ex ett 2:a gradspolynom ($g(t) = x_1 + x_2 t$) genom $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, ett 4:e gradspolynom ($g(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^4$) genom $(-1, f(-1))$, $(-0.5, f(-0.5))$, $(0, f(0))$, $(0.5, f(0.5))$, $(1, f(1))$, samt ett 20:e gradspolynom ($g(t) = x_1 + x_2 t + \ldots + x_{20} t^{20}$) genom $(-1, f(-1))$, $(-0.9, f(-0.9))$, $(-0.8, f(-0.8), \ldots, (1, f(1))$. Den heldragan linjen är $f(t)$ och de övriga approximationerna $g(t)$.

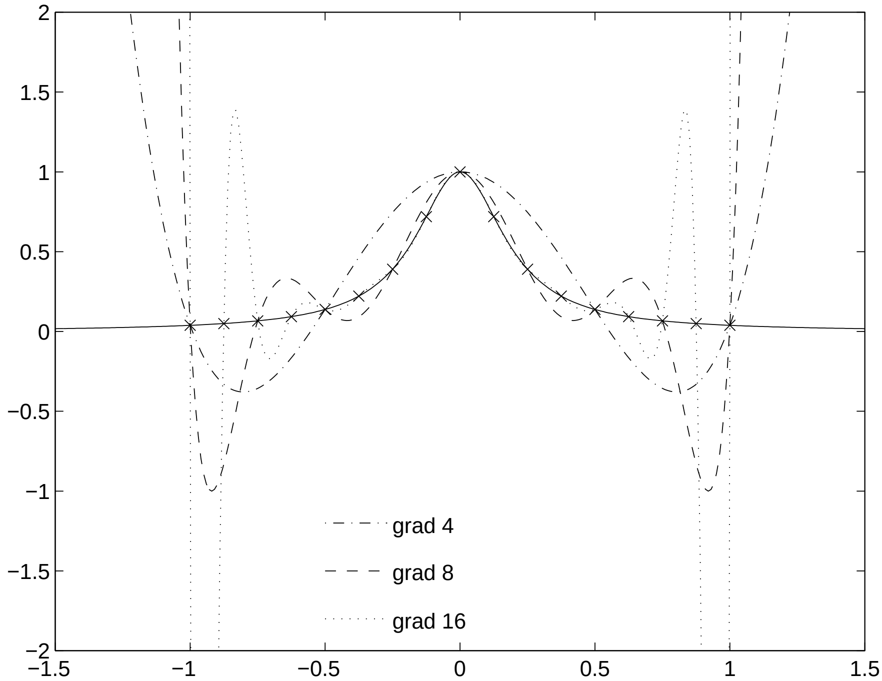

Figure 1: